

「みんなの広場」投稿原稿  
芳賀折りとピタゴラス数について

河辺龍二郎

2019. 4. 22

**【主旨】** 「芳賀折り図」もしくは「黒岩虚空蔵堂算額図」（第8問）とピタゴラス数との関係性、およびそこから、ほとんど自動的に導かれるピタゴラス数の算出式について述べたものです。これまで触れられることがほとんどなかった、ピタゴラス数の相互の関係を、図形的（鏡映対称）、空間的（一次元直線上の有理点に1:1対応）に把握できたことは、ピタゴラス数およびその算出式の理解に、寄与するものと思う。

従来のピタゴラス数の公式は諸説あるが、そのいずれもが、本稿に示す算出式の一部として含まれることを説明した。また、「補足説明3 単位円周上の有理点とピタゴラス数について」として、「単位円図」から得られる、図形的、空間的な特性が、「芳賀折り図」とほとんど一致し、両者は、ある意味で互換といってよい、ことを説明した。

\*2019. 4. 24 前稿の2部構成を1本にまとめ、重複、不要部分を削除し、「補足説明」を加えた。

\*2019. 5. 8 「補足説明2」を追加した。また、その要旨を上記「主旨」に加筆した

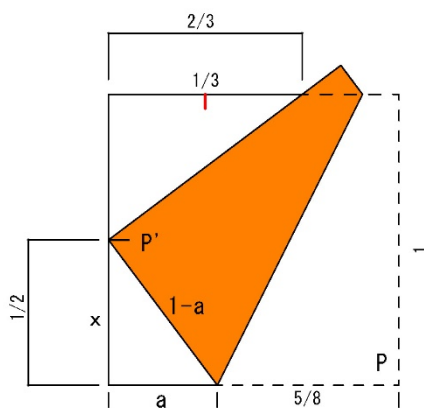
\*2019. 5. 11 「補足説明3 単位円周上の有理点とピタゴラス数について」を追加した。

今年に入ってから、当協会福島支部のHP「街角の数学」を覗かせていただき、「算額」に若干、はまり気味で、勉強させていただいております。なかで、「黒岩虚空蔵堂 第8問」という、かなり名高いお題のようですが、それに取り組んできました。何とか解答までたどり着きましたが、その関連のところ、面白い問題に行きあたりました。それを若干掘り下げたものが、今回の投稿です。

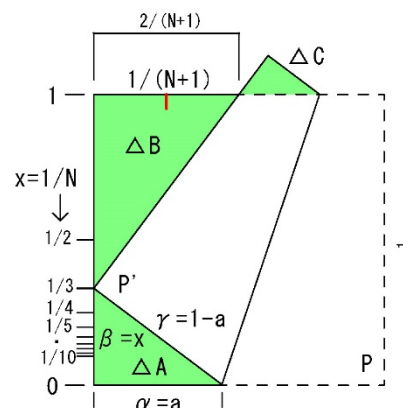
最初に「芳賀折り」とピタゴラス数の関係性について、要約を述べます。

**【要約】** 拡張された「芳賀折り」において現れる、すべての直角三角形の三辺の比は、ピタゴラス数である。また、求め得るすべてのピタゴラス数は、拡張された「芳賀折り」において現れる、直角三角形に対応している。

「芳賀折り」は本来、芳賀和夫氏の発案になる「芳賀の第1定理」と呼ばれるものとされており、(図-1)に示す通り、元の正方形の右下の頂点(P)を、折り返して、左辺上の二等分点に置いたとき(P')、上辺上に三等分点(2/3分点)を得る、というものです。実際にはこの2/3の長さの midpoint が1/3点になります。また、この“2等分から3等分”という部分を一般化して、(図-2)に示すように“・・・N等分点に置いたとき、・・・(N+1)等分点を得る”としたものも、一般には「芳賀折り」として通用しているように思われます。(N>1の自然数)



(図-1 B)  $X=1/2$  (2等分点)



(図-2 B)  $X=1/N$  (N等分点)に一般化

「芳賀折り」には「辺の等分」という機能が、主眼としてあるのですが、それを別にして、図形そのものとして見たときに、ある特別な性質というか、特徴というものが見えて来ます。図形の中には直角三角形が3つ現れますが、これらはすべて相似形です。相似形でありながら、辺上に置かれる頂点(P')の移動に伴って形が変わるのです。つまり直角以外の内角、及び3辺の比が変化します。「算額」等では形が変わるものがあまりないので、「芳賀折り図」と同じ図が使われている「黒岩虚空蔵堂算額図 第8問」などは特異なケースといってよい。これが一つの特徴です。

次に、3辺を $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$ として、その長さの比がどう変化するか、を見てみる。(図-2)  $\Delta A$ において、辺端からN等分点(1/N点)までの長さを $x$ として3辺の長さを求め、 $x=1/N$ を代入する。

ピタゴラスの定理により、 $x^2 + a^2 = (1-a)^2 = 1 - 2a + a^2$        $2a = 1 - x^2$   
 $a = (1 - x^2)/2$        $1 - a = (1 + x^2)/2$

$\alpha = a = (1 - x^2)/2 = (N^2 - 1)/2N^2$ 、  $\beta = x = 1/N$ 、  $\gamma = 1 - a = (1 + x^2)/2 = (N^2 + 1)/2N^2$   
 $2N^2$  を共通分母として通分すれば、直角三角形 A の 3 辺の比は、

$$\alpha : \beta : \gamma = N^2 - 1 : 2N : N^2 + 1 \quad \text{となる。} \quad (N > 1 \text{ の自然数})$$

N が 2 以上の自然数だから、この比は自然数の比になる。つまりピタゴラスの定理を満たす、3 つの自然数の組ということになり、これをピタゴラス数と呼んでいます。

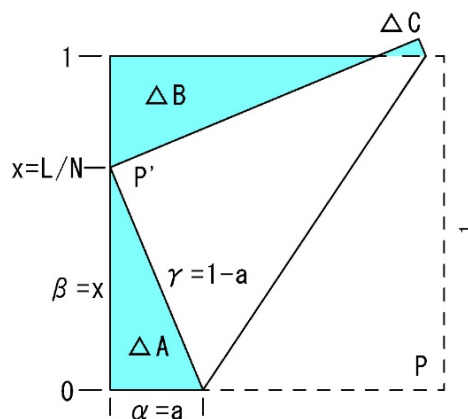
$\Delta B$ 、 $\Delta C$  においてはどうかといえば、相似比をかけるだけなので、辺長比は  $\Delta A$  と変わらない。

通常、ピタゴラス数といえば、注目度の高い、特異な部類に入る数と考えられるが、ここに見る限り、「芳賀折り図」で現れるすべての直角三角形にこれが見出されるのは、驚きという以外にありません。実際に、 $N=2 \sim 10$  を与えて  $\alpha \beta \gamma$  の比を EXCEL で算出してみた。ピタゴラス数かどうかを確認してください。

| N  | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ | $\alpha \alpha + \beta \beta$ | $\gamma \gamma$ (表-1) |
|----|----------|---------|----------|-------------------------------|-----------------------|
| 2  | 3        | 4       | 5        | 25                            | 25                    |
| 3  | 4        | 3       | 5        | 25                            | 25                    |
| 4  | 15       | 8       | 17       | 289                           | 289                   |
| 5  | 12       | 5       | 13       | 169                           | 169                   |
| 6  | 35       | 12      | 37       | 1369                          | 1369                  |
| 7  | 24       | 7       | 25       | 625                           | 625                   |
| 8  | 63       | 16      | 65       | 4225                          | 4225                  |
| 9  | 40       | 9       | 41       | 1681                          | 1681                  |
| 10 | 99       | 20      | 101      | 10201                         | 10201                 |

- N が奇数の場合は 3 数がすべて偶数になるので、約分して既約なピタゴラス数にしている。
- $N=2$  と  $N=3$  では同じ三数の組 (3, 4, 5) (4, 3, 5) であるが、ここでは異なる組として扱っている。

ところで、(図-2) には  $N=2 \sim 10$  の  $1/N$  点を目盛状に落としてあるが、かなり疎らであることが分る。この隙間を埋めつつ、(P') 点の位置を、N 等分点からさらに、 $0 < x < 1$  の間の直線上の有理点すべてに、拡張するとどうなるのか。つまり、分数表記可能な点すべてを対象にして考えてみることにする。そのために  $1/N$  点を、 $L/N$  点 ( $N > L$  の自然数) に置き替える。(図-3)



(図-3B)  $x = L/N$  (有理点) に拡張

ここで改めて、三辺の変化を求めてみる。 $\alpha \beta \gamma$  の  $x$  表記は変わらないので、 $x = 1/N$  に替えて、 $x = L/N$  を代入する。

$\alpha = a = (1 - x^2)/2 = (N^2 - L^2)/2N^2$ 、  $\beta = x = L/N$ 、  $\gamma = 1 - a = (1 + x^2)/2 = (N^2 + L^2)/2N^2$   
 $2N^2$ を共通分母として通分すれば、直角三角形 A の三辺の比は、

$$\alpha : \beta : \gamma = N^2 - L^2 : 2NL : N^2 + L^2 \quad \text{となる。} \quad (N > L \text{ の自然数})$$

これをネット上などで調べてみると、一般的な、ピタゴラス数を得るための公式に一致する。つまり「芳賀折り図」で現れる直角三角形の三辺の比を算出した結果が、一般的なピタゴラス数の公式に一致するのである。これは何を意味するかといえば、まったく驚くことに、一般に認められた公式から得られるすべてのピタゴラス数が、「芳賀折り」をした、たった1枚の折り紙（正方形）の中に内在し、潜んでいる。ということに他なりません。

ここで、周辺の問題も含めて少し整理してみます。まず、点 (P) が置かれる直線上の有理点についてですが、座標が有理数で示される直線上の点、を意味している。有理数は一般に、 $L/N = nL_1/nN_1$  ( $L_1, N_1$  は互いに素、 $n$  は自然数) と表すことが出来る。有理数  $nL_1/nN_1$  を直線上に有理点としてプロットしようとする、点 ( $L_1/N_1$ ) が代表する1点に、ほぼ  $n$  個の有理数が重なることになり、時には無限個になる。有理点としては代表点1点のみで良いので、ほぼ  $n$  個の有理数が不要となる。このことから、有理点を ( $L_1/N_1$ ) で代表させるため、互いに素でない ( $L, N$ ) の組は、とりあえず、除外する必要がある。しかしだからと言って、つまり、無限ともいえる不要な有理数を除外したからと言って、0 から 1 の間の有理点が減るわけではない。ことは理解されると思う。有理点は、必然的に既約分数の並びと同じものになり、有理数は代表たる有理点のかげに隠れるかたちになる。

拡張された「芳賀折り」の場合、有理点の数だけ、直角三角形が現れ、同時に同数のピタゴラス数が生まれる。一方、芳賀折りを離れて、既知の公式からピタゴラス数を得るとしても、公式そのものが芳賀折りと一致している以上、その範囲を超えて、結果を得ることはない。

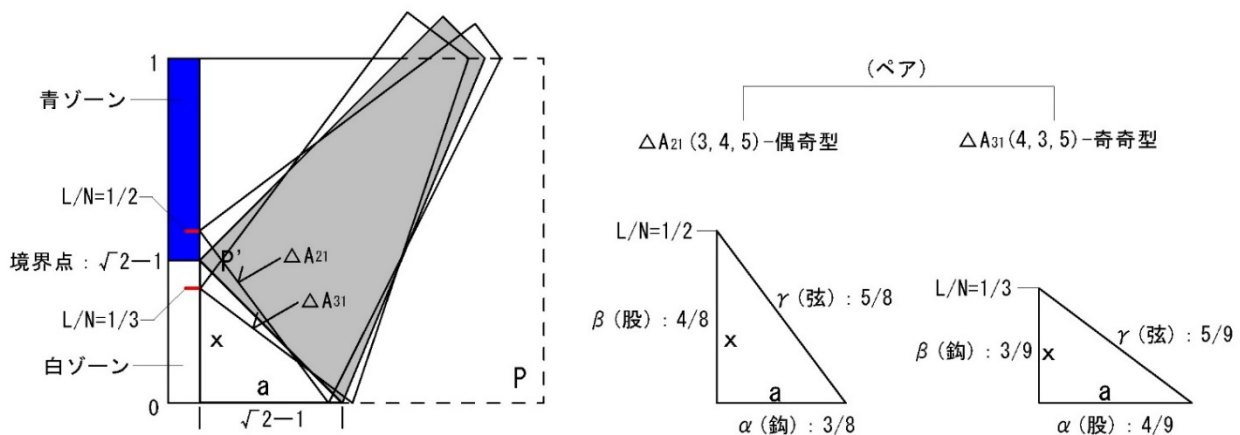
従って、芳賀折りをする正方形の一辺 1 の直線上にある有理点と、そこに現れる直角三角形とは、1 : 1 対応をしており、その直角三角形とピタゴラス数は 1 : 1 対応をしていることになる。

既約なピタゴラス数に関連して、もう一つの問題がある。L と N が互いに素だからと言って、そこから生成されるピタゴラス数が必ず互いに素になるとは限らない。(ピタゴラス数は必ずしも、互いに素でなければならないことはない。つまり約数を含んでいることがむしろ普通ともいえる。ただ、「三辺の比」といった場合は、原始ピタゴラス数に直せるものなら直したい、のも否定しがたい)。L、N が共に奇数の場合がそれで、3 数がすべて偶数 ( $2\beta, 2\alpha, 2\gamma$ ) になるが、約分した場合 ( $\beta, \alpha, \gamma$ ) となる形になっており、( $\alpha, \beta, \gamma$ ) 一実はこれが必ず存在する一と同数字、異順番になる。前出 (表-1)

(3, 4, 5) (4, 3, 5) がそれである。多分、直角三角形にすると鏡映対称だろうと思う。代数的にも、幾何学的にも「合同」、つまり通常は重複と見るはずである。が、対応する有理点は異なる点なのである。ここで片方を除外すると、一つの有理点に穴が空いてしまう。1 : 1 対応を崩さないために、約分をして、既約なピタゴラス数のかたちにすれば、同数字、異順番の「ペア」が出来ることになる。この時、「ペア」の各々は直角三角形としては直角を挟む二辺、いわゆる「鉤股」が入れ替わり、ピタゴラス数としては 3 数の内、第 1 数と第 2 数が入れ替わる。

また、すべてのピタゴラス数は、長さ 1 の直線上の有理点に対応しているが、「ペア」の各々が対応する有理点 ( $L/N$ ) は、ある境界点を挟んで存在していることがわかる。その境界点は (図-4B) にも示すように、鉤股の切り替わりがおこる、2 等辺三角形を形づくる時の (P') の位置であり、直線の 0 端から ( $\sqrt{2}-1$ ) の点である。

以上の各要素を表したのが下図（図-4B）である。



（図-4B） 有理点（L/N）に対応する三角形

この図は、二つの有理点と境界点に対応する「芳賀折り図」を重ねて表したものである。図には、3つの三角形が示されている。点（P'）を頂点とする、太めの線で描かれた、2等辺三角形（ $x = a = \sqrt{2}-1$ ）は、境界点を出すためのものである。二つ目は、点（P'）の上、ブルーのゾーン（境界点以上を示す）内の赤い目盛（ $L/N=1/2$ ）を頂点とした細目の線の三角形で少しタテ長である。和名では、 $x$ が股、 $a$ が鉤となる。三つめは、点（P'）の下、白ゾーン（境界点以下を示す）内の赤い目盛（ $L/N=1/3$ ）を頂点とする、やはり細目の線の三角形で、こちらはややヨコ長である。和名では  $x$ が鉤、 $a$ が股になる。細線の三角形を横に取り出して図示しているが、 $\Delta A_{21}(3, 4, 5)$ 、 $\Delta A_{31}(4, 3, 5)$ の三角形で、互いに「ペア」の鏡映対称である。つまり鉤股が入れ替わっている。（実は辺長が変わるので合同にはならない、相似形である）。また、それぞれが、有理点（1/2）、（1/3）に対応しており、境界点を挟んだ対応点を持っていることが分る。また、 $L/N=1/2$ は「偶奇型」に属し、 $L/N=1/3$ は「奇奇型」に属すことも、表している。（「偶奇型」「奇奇型」については後述の公式を参照）

以上を踏まえて、“芳賀折り図”に現れる直角三角形の三辺の比

$$\alpha : \beta : \gamma = N^2 - L^2 : 2NL : N^2 + L^2 \quad \text{から、次の算出式を導くことが出来る。}$$

【ピタゴラス数の公式】 鏡映対称を区別せず同一と見る場合、次のいずれかの方法により、既約なピタゴラス数を算出することが出来る。

$N, L$  が  $N > L > 0$  で、互いに素な整数のとき（以下共通）。

(1)  $N, L$  の偶奇性が異なる場合、（偶・奇型と呼ぶ）

$$\{\alpha, \beta, \gamma\} = \{N^2 - L^2, 2NL, N^2 + L^2\} \text{ -----① から算出される。}$$

(2)  $N, L$  が共に奇数同士の場合、（奇・奇型と呼ぶ）

$$\{\alpha, \beta, \gamma\} = \{(N^2 - L^2)/2, NL, (N^2 + L^2)/2\} \text{ -----② から算出される。}$$

(3)  $1 > L/N > \sqrt{2}-1$  の範囲を算出する。ただし、偶奇型、奇奇型は各々の算式に基づく。

(4)  $\sqrt{2}-1 > L/N > 0$  の範囲を算出する。ただし、偶奇型、奇奇型は各々の算式に基づく。

- (1) は従来のピタゴラス数の公式そのものである。
- (2) は (1) と対を成すものだが、独立した新しい方法である。
- (3) は青ゾーン、(4) は白ゾーンと呼ぶ。互いに対を成す。また、各々の範囲 (ゾーン) 内の有理点に 1:1 対応している。

【サンプル出力】 4つの算出ケースを、EXCELで実際の数値を与えて出力したものを、次頁以降に掲載する。

算出条件 N=2~15を昇順に与えてデータを算出後、 $\gamma$ の昇順で並び替える、ただし、ケース間でのデータ一致を優先して微調整をした。また、 $\gamma$ 同値の時はその順不問。

- 注目点 1. 同じN=2~15でも、ケースごとに算出データ数が違う。最大は(1)のケースでデータ数は47、最小は(2)のケースでデータ数は24、約1/2である。これはケース間の速度の差であるともいえる。
2. (2)のデータ数、N0.24が“データ一致上限”で、これより若いN0.では、4つのケース間で、データ( $\alpha \beta \gamma$ の組み合わせ)が一致している。Nの上限を大きくして行けば、データ数も大きくなるが、“データ一致上限”も大きくなり、この比率は変わらない。つまり、最大のデータ数が大きくなれば、その1/2のデータがケース間で一致する。データ数が無限大になれば、“データ一致上限”も無限大になり、最終的にはすべてのデータが、4つのケース間で一致することになる。つまり、どのケースで算出しても、同じ答えが得られるということです。
  3. 個々のデータで、 $\alpha \beta \gamma$ の順序を見ると(3)のケースでは常に $\alpha < \beta$ 、このケースでは、見栄えを気にしての $\alpha \beta$ の入れ替えなど不要である。また、逆に、(4)では常に $\alpha > \beta$ になっている。

サンプル出力 1

(1) N.Lの偶奇性が異なる場合(偶・奇型)

| NO | 真値       | L / N   | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ |
|----|----------|---------|----------|---------|----------|
| 1  | 0.5      | 1 / 2   | 3        | 4       | 5        |
| 2  | 0.666667 | 2 / 3   | 5        | 12      | 13       |
| 3  | 0.25     | 1 / 4   | 15       | 8       | 17       |
| 4  | 0.75     | 3 / 4   | 7        | 24      | 25       |
| 5  | 0.4      | 2 / 5   | 21       | 20      | 29       |
| 6  | 0.166667 | 1 / 6   | 35       | 12      | 37       |
| 7  | 0.8      | 4 / 5   | 9        | 40      | 41       |
| 8  | 0.285714 | 2 / 7   | 45       | 28      | 53       |
| 9  | 0.833333 | 5 / 6   | 11       | 60      | 61       |
| 10 | 0.571429 | 4 / 7   | 33       | 56      | 65       |
| 11 | 0.125    | 1 / 8   | 63       | 16      | 65       |
| 12 | 0.375    | 3 / 8   | 55       | 48      | 73       |
| 13 | 0.857143 | 6 / 7   | 13       | 84      | 85       |
| 14 | 0.222222 | 2 / 9   | 77       | 36      | 85       |
| 15 | 0.625    | 5 / 8   | 39       | 80      | 89       |
| 16 | 0.444444 | 4 / 9   | 65       | 72      | 97       |
| 17 | 0.1      | 1 / 10  | 99       | 20      | 101      |
| 18 | 0.3      | 3 / 10  | 91       | 60      | 109      |
| 19 | 0.875    | 7 / 8   | 15       | 112     | 113      |
| 20 | 0.181818 | 2 / 11  | 117      | 44      | 125      |
| 21 | 0.363636 | 4 / 11  | 105      | 88      | 137      |
| 22 | 0.083333 | 1 / 12  | 143      | 24      | 145      |
| 23 | 0.153846 | 2 / 13  | 165      | 52      | 173      |
| 24 | 0.071429 | 1 / 14  | 195      | 28      | 197      |
| 25 | 0.888889 | 8 / 9   | 17       | 144     | 145      |
| 26 | 0.7      | 7 / 10  | 51       | 140     | 149      |
| 27 | 0.545455 | 6 / 11  | 85       | 132     | 157      |
| 28 | 0.416667 | 5 / 12  | 119      | 120     | 169      |
| 29 | 0.9      | 9 / 10  | 19       | 180     | 181      |
| 30 | 0.727273 | 8 / 11  | 57       | 176     | 185      |
| 31 | 0.307692 | 4 / 13  | 153      | 104     | 185      |
| 32 | 0.583333 | 7 / 12  | 95       | 168     | 193      |
| 33 | 0.461538 | 6 / 13  | 133      | 156     | 205      |
| 34 | 0.214286 | 3 / 14  | 187      | 84      | 205      |
| 35 | 0.909091 | 10 / 11 | 21       | 220     | 221      |
| 36 | 0.357143 | 5 / 14  | 171      | 140     | 221      |
| 37 | 0.133333 | 2 / 15  | 221      | 60      | 229      |
| 38 | 0.615385 | 8 / 13  | 105      | 208     | 233      |
| 39 | 0.266667 | 4 / 15  | 209      | 120     | 241      |
| 40 | 0.916667 | 11 / 12 | 23       | 264     | 265      |
| 41 | 0.769231 | 10 / 13 | 69       | 260     | 269      |
| 42 | 0.642857 | 9 / 14  | 115      | 252     | 277      |
| 43 | 0.533333 | 8 / 15  | 161      | 240     | 289      |
| 44 | 0.923077 | 12 / 13 | 25       | 312     | 313      |
| 45 | 0.785714 | 11 / 14 | 75       | 308     | 317      |
| 46 | 0.928571 | 13 / 14 | 27       | 364     | 365      |
| 47 | 0.933333 | 14 / 15 | 29       | 420     | 421      |

(2) N.Lが共に奇数同志の場合(奇・奇型)

| NO | 真値       | L / N   | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ | 一致 |
|----|----------|---------|----------|---------|----------|----|
| 1  | 0.333333 | 1 / 3   | 4        | 3       | 5        | 0  |
| 2  | 0.2      | 1 / 5   | 12       | 5       | 13       | 0  |
| 3  | 0.6      | 3 / 5   | 8        | 15      | 17       | 0  |
| 4  | 0.142857 | 1 / 7   | 24       | 7       | 25       | 0  |
| 5  | 0.428571 | 3 / 7   | 20       | 21      | 29       | 0  |
| 6  | 0.714286 | 5 / 7   | 12       | 35      | 37       | 0  |
| 7  | 0.111111 | 1 / 9   | 40       | 9       | 41       | 0  |
| 8  | 0.555556 | 5 / 9   | 28       | 45      | 53       | 0  |
| 9  | 0.090909 | 1 / 11  | 60       | 11      | 61       | 0  |
| 10 | 0.777778 | 7 / 9   | 16       | 63      | 65       | 0  |
| 11 | 0.272727 | 3 / 11  | 56       | 33      | 65       | 0  |
| 12 | 0.454545 | 5 / 11  | 48       | 55      | 73       | 0  |
| 13 | 0.636364 | 7 / 11  | 36       | 77      | 85       | 0  |
| 14 | 0.076923 | 1 / 13  | 84       | 13      | 85       | 0  |
| 15 | 0.230769 | 3 / 13  | 80       | 39      | 89       | 0  |
| 16 | 0.384615 | 5 / 13  | 72       | 65      | 97       | 0  |
| 17 | 0.818182 | 9 / 11  | 20       | 99      | 101      | 0  |
| 18 | 0.538462 | 7 / 13  | 60       | 91      | 109      | 0  |
| 19 | 0.066667 | 1 / 15  | 112      | 15      | 113      | 0  |
| 20 | 0.692308 | 9 / 13  | 44       | 117     | 125      | 0  |
| 21 | 0.466667 | 7 / 15  | 88       | 105     | 137      | 0  |
| 22 | 0.846154 | 11 / 13 | 24       | 143     | 145      | 0  |
| 23 | 0.733333 | 11 / 15 | 52       | 165     | 173      | 0  |
| 24 | 0.866667 | 13 / 15 | 28       | 195     | 197      | 0  |

・真値は L/N の小数表記。直線上 (又はゾーン内) の、対応する有理点の位置が分ります。

境界点は  $\sqrt{2}-1=0.41421356$

・NO. 24 が “データ一致上限” を示す。

サンプル出力 2

(3)  $1 > L/N > \sqrt{2}-1$  の範囲(青ゾーン)

(4)  $\sqrt{2}-1 > L > 0$  の範囲(白ゾーン)

| NO | 真値       | L / N   | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ | NO | 真値       | L / N  | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ | 一致 |
|----|----------|---------|----------|---------|----------|----|----------|--------|----------|---------|----------|----|
| 1  | 0.5      | 1 / 2   | 3        | 4       | 5        | 1  | 0.333333 | 1 / 3  | 4        | 3       | 5        | 0  |
| 2  | 0.666667 | 2 / 3   | 5        | 12      | 13       | 2  | 0.2      | 1 / 5  | 12       | 5       | 13       | 0  |
| 3  | 0.6      | 3 / 5   | 8        | 15      | 17       | 3  | 0.25     | 1 / 4  | 15       | 8       | 17       | 0  |
| 4  | 0.75     | 3 / 4   | 7        | 24      | 25       | 4  | 0.142857 | 1 / 7  | 24       | 7       | 25       | 0  |
| 5  | 0.428571 | 3 / 7   | 20       | 21      | 29       | 5  | 0.4      | 2 / 5  | 21       | 20      | 29       | 0  |
| 6  | 0.714286 | 5 / 7   | 12       | 35      | 37       | 6  | 0.166667 | 1 / 6  | 35       | 12      | 37       | 0  |
| 7  | 0.8      | 4 / 5   | 9        | 40      | 41       | 7  | 0.111111 | 1 / 9  | 40       | 9       | 41       | 0  |
| 8  | 0.555556 | 5 / 9   | 28       | 45      | 53       | 8  | 0.285714 | 2 / 7  | 45       | 28      | 53       | 0  |
| 9  | 0.833333 | 5 / 6   | 11       | 60      | 61       | 9  | 0.090909 | 1 / 11 | 60       | 11      | 61       | 0  |
| 10 | 0.571429 | 4 / 7   | 33       | 56      | 65       | 10 | 0.125    | 1 / 8  | 63       | 16      | 65       | 0  |
| 11 | 0.777778 | 7 / 9   | 16       | 63      | 65       | 11 | 0.272727 | 3 / 11 | 56       | 33      | 65       | 0  |
| 12 | 0.454545 | 5 / 11  | 48       | 55      | 73       | 12 | 0.375    | 3 / 8  | 55       | 48      | 73       | 0  |
| 13 | 0.857143 | 6 / 7   | 13       | 84      | 85       | 13 | 0.222222 | 2 / 9  | 77       | 36      | 85       | 0  |
| 14 | 0.636364 | 7 / 11  | 36       | 77      | 85       | 14 | 0.076923 | 1 / 13 | 84       | 13      | 85       | 0  |
| 15 | 0.625    | 5 / 8   | 39       | 80      | 89       | 15 | 0.230769 | 3 / 13 | 80       | 39      | 89       | 0  |
| 16 | 0.444444 | 4 / 9   | 65       | 72      | 97       | 16 | 0.384615 | 5 / 13 | 72       | 65      | 97       | 0  |
| 17 | 0.818182 | 9 / 11  | 20       | 99      | 101      | 17 | 0.1      | 1 / 10 | 99       | 20      | 101      | 0  |
| 18 | 0.538462 | 7 / 13  | 60       | 91      | 109      | 18 | 0.3      | 3 / 10 | 91       | 60      | 109      | 0  |
| 19 | 0.875    | 7 / 8   | 15       | 112     | 113      | 19 | 0.066667 | 1 / 15 | 112      | 15      | 113      | 0  |
| 20 | 0.692308 | 9 / 13  | 44       | 117     | 125      | 20 | 0.181818 | 2 / 11 | 117      | 44      | 125      | 0  |
| 21 | 0.466667 | 7 / 15  | 88       | 105     | 137      | 21 | 0.363636 | 4 / 11 | 105      | 88      | 137      | 0  |
| 22 | 0.846154 | 11 / 13 | 24       | 143     | 145      | 22 | 0.083333 | 1 / 12 | 143      | 24      | 145      | 0  |
| 23 | 0.733333 | 11 / 15 | 52       | 165     | 173      | 23 | 0.153846 | 2 / 13 | 165      | 52      | 173      | 0  |
| 24 | 0.866667 | 13 / 15 | 28       | 195     | 197      | 24 | 0.071429 | 1 / 14 | 195      | 28      | 197      | 0  |
| 25 | 0.888889 | 8 / 9   | 17       | 144     | 145      | 25 | 0.307692 | 4 / 13 | 153      | 104     | 185      |    |
| 26 | 0.7      | 7 / 10  | 51       | 140     | 149      | 26 | 0.214286 | 3 / 14 | 187      | 84      | 205      |    |
| 27 | 0.545455 | 6 / 11  | 85       | 132     | 157      | 27 | 0.357143 | 5 / 14 | 171      | 140     | 221      |    |
| 28 | 0.416667 | 5 / 12  | 119      | 120     | 169      | 28 | 0.133333 | 2 / 15 | 221      | 60      | 229      |    |
| 29 | 0.9      | 9 / 10  | 19       | 180     | 181      | 29 | 0.266667 | 4 / 15 | 209      | 120     | 241      |    |
| 30 | 0.727273 | 8 / 11  | 57       | 176     | 185      |    |          |        |          |         |          |    |
| 31 | 0.583333 | 7 / 12  | 95       | 168     | 193      |    |          |        |          |         |          |    |
| 32 | 0.461538 | 6 / 13  | 133      | 156     | 205      |    |          |        |          |         |          |    |
| 33 | 0.909091 | 10 / 11 | 21       | 220     | 221      |    |          |        |          |         |          |    |
| 34 | 0.615385 | 8 / 13  | 105      | 208     | 233      |    |          |        |          |         |          |    |
| 35 | 0.916667 | 11 / 12 | 23       | 264     | 265      |    |          |        |          |         |          |    |
| 36 | 0.769231 | 10 / 13 | 69       | 260     | 269      |    |          |        |          |         |          |    |
| 37 | 0.642857 | 9 / 14  | 115      | 252     | 277      |    |          |        |          |         |          |    |
| 38 | 0.533333 | 8 / 15  | 161      | 240     | 289      |    |          |        |          |         |          |    |
| 39 | 0.923077 | 12 / 13 | 25       | 312     | 313      |    |          |        |          |         |          |    |
| 40 | 0.785714 | 11 / 14 | 75       | 308     | 317      |    |          |        |          |         |          |    |
| 41 | 0.928571 | 13 / 14 | 27       | 364     | 365      |    |          |        |          |         |          |    |
| 42 | 0.933333 | 14 / 15 | 29       | 420     | 421      |    |          |        |          |         |          |    |

・真値は  $L/N$  の小数表記。直線上（又はゾーン内）の、対応する有理点の位置が分ります。  
境界点は  $\sqrt{2}-1=0.41421356$

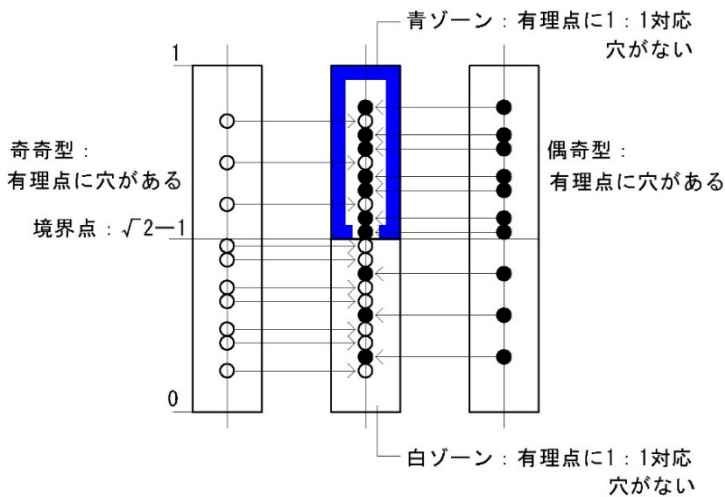
・NO. 24 が“データ一致上限”を示す。

【補足説明】 「芳賀折り図」に現れる直角三角形から得られるピタゴラス数を、仮に、完全ピタゴラス数 (PP) と呼んでみる。

(PP) は、鏡映対称を区別して含んでおり、長さ 1 の直線上の有理点に、1 : 1 対応している。一方、いわゆるピタゴラス数 (PI) は鏡映対称を区別しないので、 $(PP) = 2 \times (PI)$  の関係になっている。

(PI) は有理点と 1 : 1 対応はしておらず、とびとびの有理点に対応している。つまり、有理点に穴がある、ことになる。通常 (PI) は偶奇型であるから、抜け落ちた穴は、奇奇型によって過不足なく埋められることになる。なお、上記の公式から得られるのは、勿論 (PI) である。

下図は有理点と、算出式における型別、ゾーン別の関係を模式的に示したものである。



(図-5B) 型別、ゾーン別模式図

(PI) は必ず有理点の穴を持っているが、型別の場合とはとびとびの穴であり、ゾーン別の場合はその穴が片側、つまり反対側のゾーンに寄せ集められている、というわけです。

また、この図に従えば、 $(PI) = (\text{偶奇型}) = (\text{奇奇型}) = (\text{青ゾーン}) = (\text{白ゾーン})$

$(PP) = (\text{偶奇型}) + (\text{奇奇型}) = (\text{青ゾーン}) + (\text{白ゾーン}) = 2 \times (PI)$

であることも分かる。

【補足説明2】 ピタゴラス数の公式に関しては、その根拠、由来等が必ずしも、はっきりしているとは言いがたい。書物やネットの記事なども「・・・2000年以上も前のギリシャの数学者たちは、このことを知っていた・・・」とか、「・・・じつは、B.C.1800年（3800年前）のバビロニアの粘土板にも、このことを知っていたという状況証拠が残っている・・・」といった記述が多い。一方、名だたる人々の発見である、との説もある。史実か伝説かは定かでないが、それらの諸説について、ここで取り上げてみることにする。

- ピタゴラスによるピタゴラス数：
 

「 $n$ ：奇数とするとき、ピタゴラス数は  $\{n, (n^2-1)/2, (n^2+1)/2\}$  の形になる」  
これは、本算出式の内、 $L=1$ （奇数）に限定した時の、奇奇型に相当する。
- プラトンによるピタゴラス数：
 

「 $m$ ：整数とするとき、ピタゴラス数は  $(2m, m^2-1, m^2+1)$  の形になる」  
これについては若干説明が必要である。偶奇性について指定がないが、 $m$ ：奇数の場合は、上記に重なることになるが、こちらは約数2が含まれており、算式を2で割ったとすればピタゴラスの場合と同一になる。従って、 $m$ ：偶数の場合のみを取り出せば、本算出式の内、 $L=1$ （奇数）に限定した時の、偶奇型に相当する。
- ブラーマグプタによるピタゴラス数： 7世紀ごろのインドの数学者、天文学者である。  
「任意の整数  $m, n$ （ただし、 $m > n > 0$ 、互いに素）で、一方が偶数、他方が奇数の場合、  
 $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$  の形となる」  
これは、いわゆるピタゴラス数、つまり、従来の公式そのものであるから、本算出式の内、偶奇型に相当する。
- 上記諸説を包括図で示すと（図-6）になる。ピタゴラスとプラトンの説はいずれも  $L=1$  に限定されるため、青ゾーンに含まれるのはプラトンにおける  $N=m=2$  の時のピタゴラス数のみで、他は全て白ゾーンに含まれる。図の下側に片寄っているのは、それを示している。

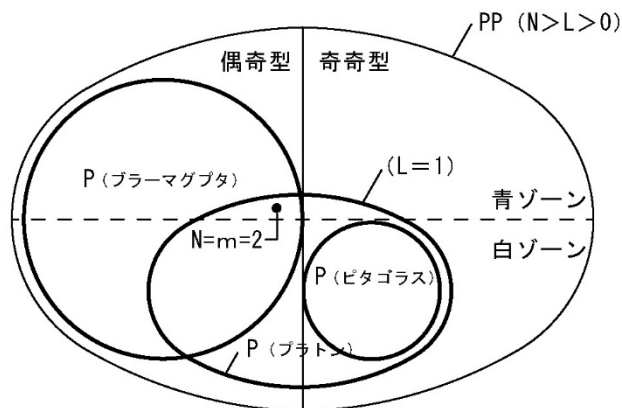


図-6：ピタゴラス数（従来）の包括図

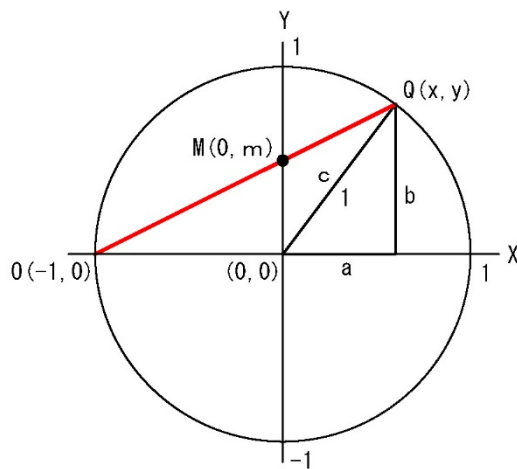
- このほかに「単位円におけるピタゴラス数」がある。これについては、諸説ある従来の公式とは異なるため、稿を改めることとする。

「単位円周上の有理点」は、他のピタゴラス数の公式の証明などとは一味違っており、ピタゴラス数の算出式の根拠を示すものとして、認められてよいように思う。というのも、メソポタミアの粘土板をはじめとして、諸説ある公式の由来は、まず算式ありき、から始まっているように思える。その意味では、公式を導き出す手順を明示した、唯一のものとして、根拠とするに足るものと言えよう。

これについて、復習をしてみよう。

図示の直角三角形の3辺を (a、b、c) とした時、この3辺の比が整数 (ピタゴラス数) であるための必要で十分な条件は、3数がすべて有理数であることである。

( a、b、c ) = ( x、y、1 ) が有理数 ならば、円周上の点 Q ( x、y ) は有理点である。つまり、**【ピタゴラスの三角形を求めることは、単位円周上に有理点 Q ( x、y ) を求めることと同等である】**



ここで、点 Q ( x、y ) と点 0 ( -1、0 ) を直線で結び、Y 軸との交点を M とする。これは、点 0 ( -1、0 ) から、単位円周上の点 Q ( x、y ) を Y 軸上の点 M ( 0、m ) に射影した形であり、点 Q と点 M は 1 : 1 対応をしている、と考えられる。

点 Q と点 0(-1, 0) を結んだ直線の方程式は、  $y = m ( x + 1 )$  -----①

単位円の方程式は、  $x^2 + y^2 = 1$  -----②

①、②から  $( x、y ) = ( ( 1 - m^2 ) / ( 1 + m^2 )、 2m / ( 1 + m^2 ) )$  -----③

①から  $m = y / ( x + 1 )$  なので x、y が有理数ならば、mは有理数である。また③から、m が有理数ならば、x、y は有理数であることがわかる。つまり、点 M ( 0、m ) は Y 軸直線上の有理点であり、点 Q ( x、y ) は単位円周上の有理点である。従って、

**【Y 軸直線上の有理点 M ( 0、m ) は、単位円周上の有理点 Q ( x、y ) に 1 : 1 対応をしている】**

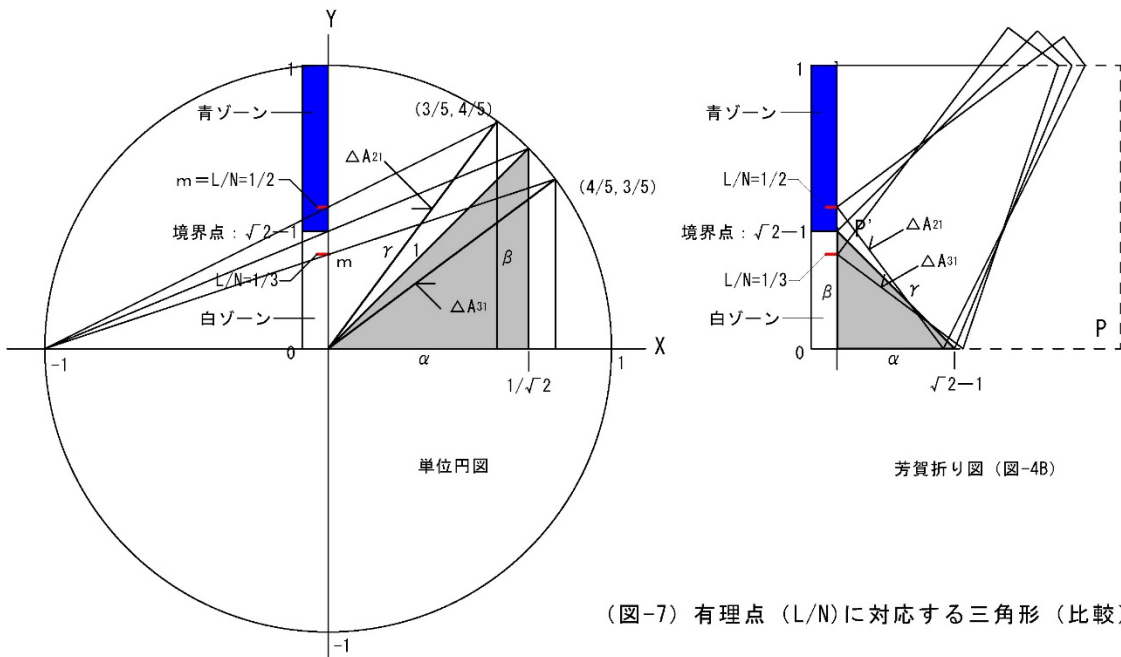
(ただし、 $x > 0、y > 0、1 > m > 0$ )

mは有利数なので、 $m = L/N$  (ただし、N、Lは $N > L > 0$  で互いに素な整数) を③に代入し、通分すると、ピタゴラス数の算出式として、

$$( \alpha、\beta、\gamma ) = ( N^2 - L^2、2NL、N^2 + L^2 ) \quad \text{が得られる。}$$

単位円周上の有理点とピタゴラス数についての復習は以上である。

ここで、「芳賀折り図」との比較のため、前稿（図-4B）で図示した同じ要素を、「単位円図」においても図示してみたのが下図である。



(図-7) 有理点 (L/N) に対応する三角形 (比較)

図示されている要素に関しては、内容的には重なる部分がほとんどなので、前出（図-4B）の説明文を参照してみてください。

両図はほとんど共通する要素で成り立っているが、見た目の差違もある。目立つ違いとして、二つの点が挙げられる。一つは、各々の直角三角形が対応するタテ軸上の有理点  $(0, m=L/N)$  に対して、「芳賀折り図」では、三角形の頂点が直接、有理点に対応するのに対し、「単位円図」の場合は、一旦、円周上に射影された有理点に三角形の頂点に対応するという形で、遠隔的になっている。結果、三角形の向きが芳賀折りとは反対向き。もう一つは、既に述べたとおり、芳賀折りの場合、鏡映対称の「ペア」である、 $\Delta A_{21}(3, 4, 5)/8$  と  $\Delta A_{31}(4, 3, 5)/9$  の辺長が異なっており、相似形であったが、「単位円図」では図を見て分る通り、 $(x, y, 1)$  が  $(3, 4, 5)/5$  と  $(4, 3, 5)/5$  であり、「ペア」は辺長が等しく、鏡映対称かつ合同である。以上の相違する2点を除いた基本的な部分に関しては、細部に至るまでほとんど同一といってよいことから、前稿までの「芳賀折り図」に関する記述は、「単位円図」においても適用できるといってよい。

従って、以上を踏まえて、次の算出式を導くことが出来る。

【ピタゴラス数の公式】（以下は、前出「ピタゴラス数の新公式」に記述したものと、まったく同一です、そちらを参照してください）

ここで、図らずも「芳賀折り図」と「単位円図」の意外な一致を見たわけだが、「芳賀折り図」から得られるピタゴラスの三角形と、「単位円周上の有理点」から得られるピタゴラスの三角形、いずれの方法によっても、「ピタゴラス数の公式」の新しい側面が導かれることを、改めて、確認しておきたいと思う。