球の最密充填について

河辺龍二郎

20180205

球の最密充填について

[要約]

この要約は、日本数学協会の「みんなの広場」に数回にわたり投稿したものを、まとめるにあたり、主要な点を抜粋、要約したものである。複数の投稿文はその時々の知識の程度にもより、必ずしも統一が取れているとは言えないため、全体を見渡し、インデックスも兼ねる意味で、これを最初に置くことにした。

本論考の主旨は、「球の最密充填」について、結晶構造からの引用を出来るだけ少なくし、幾何学、中でも多面体に関する記述を中心に、説明もしくは解説を、再構築してみよう、と言うものである。 以下がその要約。

説明１：球の最密充填配置は、立方体グリッドに、単位立方体の中接球を３次元市松配置したものである。

説明２：球の最密充填時には、１個の球に 12 個の球が接することで、ユニットを形成するが、この時、12 個の球の中心は、一辺が球の直径に等しい立方八面体の各頂点を占める。

以上は、「菱形 12 面体」をボロノイ・セルとする場合について述べたものである。

説明 3：球の最密充填配置は、「菱形１２面体」と「ひねり菱形１２面体」をボロノイ・セルとする方法によって実現される。そのいずれかの方法でも良いし、両者の混合形式でも良い。

「菱形 12 面体」をボロノイ・セルとする場合を、**R 型**（正規型）と呼び、「ひねり菱形12面体」の場合を、**H 型**（ひねり変形型）と呼ぶ。結晶構造を引用した場合、R 型は面心立方格子もしくは立方最密充填構造、H 型は六方最密充填構造となる。

球の最密充填問題は、約400年前の「ケプラー予想」に始まるとされているが、その時、ケプラーが示したのは、R 型であったと考えられる。H 型及び RH 混合形式については、それから約300年のちに、結晶学者のバーロウ等によって、発見され、公表されたものである。 R 型は対称性に優れ、美しい。

内容の概略 ：

本文については、部分改訂等を除いて、投稿時の形を出来るだけ残すよう心掛けた。当初、第1部だけを予定していたのだが、予定外の第2部まで拡張してしまったので、文脈等がその方が自然であろうと考えたからである。従って、説明1、説明2　は予め用意されていたが、説明3　については、全く予想外のところまで、来てしまった、と言うのが、偽らざる感想です。

第１部　一つの構造

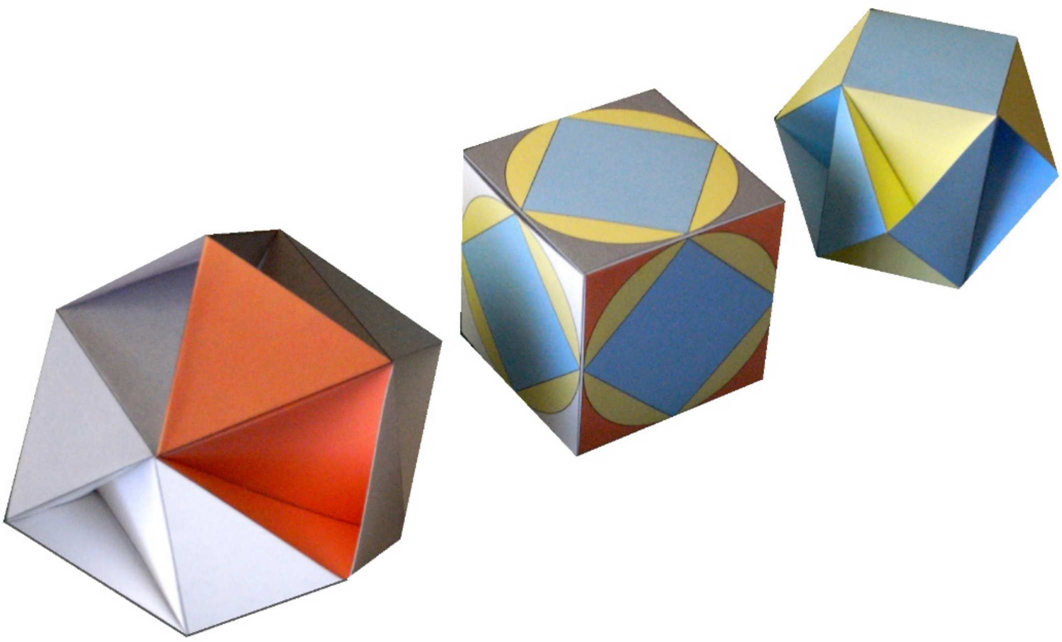
——球の最密充填は、正方形を基礎とする配置（二次元の正方配置）と六角形を基礎とする配置（二次元の六方配置）という、二つの異なる配置から作られる・・（そして）これら二つの充填方法はまったく同じものあり、単に見る角度が違うだけである——J. ケプラー「六角形の雪について」

［１］

球の最密充填について、現在なされている説明、もしくは解説は、多くの場合、三つのキーワードを介して行われている。（1）面心立方格子、（2）六方最密充填構造、（3）ボロノイ・セル（菱形１２面体）がそれである。（1）と（2）は結晶構造からの引用で、セットで説明されることが多い。（3）のボロノイ・セルは単位領域（空間）を表す語である。菱形１２面体は自身のみで、３次元空間を埋めることで知られているが、その時の自身の内接球の配置が、最密充填配置になっているのである。従って、１個の球を内包する菱形１２面体をその単位空間（ボロノイ・セル）と見て、その体積比を計算すれば、空間に対する球の充填密度が得られる、というものである。
しかし、いずれの場合も、説明がわかりやすいとは言えず、イメージし難いと感じるのは、私ばかりではないと思う。おそらく原因は（1）と（2）の場合は、物理化学分野の結晶構造からの引用であること、もともと「面心立方格子」「六方最密充填構造」というものが良く分からないので、どうかすると、その語の解説を読むだけにとどまってしまう。また、（3）の場合には、純粋に幾何学アプローチなのだが、いかにせん「菱形１２面体」という、一般にあまりなじみのない立体が、イメージを抱き難くしているのだと思う。

そんなわけで、あまりよくわからない結晶構造に頼らず、幾何学アプローチで、しかも、もう少し見慣れた立体を媒介とした説明を試みてみよう、というのが今回の趣旨である。

まず、スタートとなるのは、菱形１２面体とその内接立体である。ここに、前回投稿（菱形１２面体の作り方）に示した模式的な模型写真を再掲する。



また、（表-1）は立体相互の関係等について、球の半径を１とした時の各部の寸法・体積を併せて、まとめたものである。　なお、表中の体積算出については、後出の＊注記を参照してください。

<table>
<tr><td colspan="4">（表-1）　菱形12面体と内接立体</td><td colspan="3">接関係　　球</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>寸法</td><td>体積＊</td><td>（接点）</td><td>寸法</td><td>体積＊</td></tr>
<tr><td colspan="2">菱形12面体</td><td>菱形対角線長手:2
同上　短手:$\sqrt{2}$</td><td>$4\sqrt{2}$</td><td>内接球
（面中心）</td><td rowspan="3">半径(r):
1</td><td rowspan="3">(4/3)π</td></tr>
<tr><td rowspan="2">内接</td><td>立方体</td><td>辺長　:$\sqrt{2}$</td><td>$2\sqrt{2}$</td><td>中接球
（辺中点）</td></tr>
<tr><td>立方八面体
（双対）</td><td>辺長　:1</td><td></td><td>外接球
（頂点）</td></tr>
</table>

ここで取り上げる内接立体は、球、立方体、立方八面体（菱形１２面体の双対）の三つであるが、すべてが同じ１点を接点としており、その接点は菱形面の中心点である。ただし、立方体の場合はそこを通る菱形面の対角線が接線となっている。この模型写真の中央に置かれた立方体には、他の二つの立体が模式的に描かれている。３つの内接立体を考える時は、このパターン付き立方体一つを考えればよいことになる。

さて、菱形１２面体が空間を過不足なく埋めたとき、内接球が最密充填配置を取ることは、すでに述べたが、内接立方体は一体どうなるのだろうか。まず、二つの菱形１２面体が、面と面をぴったり合わせて接した時、それらに内接する立方体同士は、４５度の角度で内接しているので、一つの辺のみを共有する形で、接することになる。このとき、二つの立方体の各面はどことも接することなく、空間に解放されている。続いて第３の菱形１２面体の面が接したとしても、そこに内接する立方体は、辺のみで他の立方体に接するのであって、その面は空間に解放されるのみである。空間を埋めたすべての菱形１２面体で同様なので、すべての内接立方体は辺でのみ、他の立方体と接続し、面は常に空間に解放されていることになる。その結果、（図－１）を見てわかる通り、平面的には市松模様を作ることになる。これがX,Y,Z　３方向の平面で同様な結果となる。すなわち、３次元市松配置である。図を見ると、内接立方体（薄墨）に加えて、「空（くう）

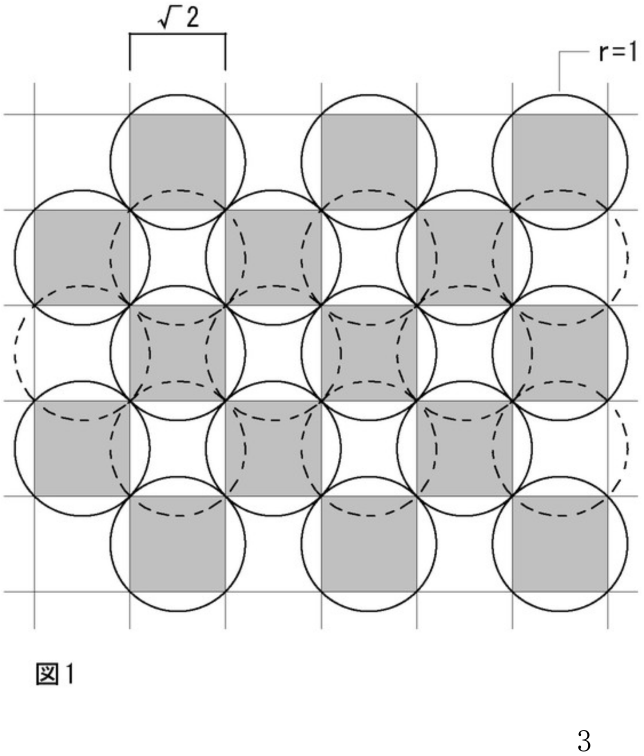


図1

の立方体」（白抜き）が一つ置きに挟まっていることが分る。この「空の立方体」は内接立方体と同寸法、同数である。
別の言い方をすると、菱形１２面体が空間を埋めたとき、外見上は、それ自身が密接に積み重なって見えるだけなのだが、その内部には隠れた構造体として、内接立方体と「空の立方体」が１：１で形成する立方体グリッドが構築されているのである。
内接立方体は中接球の形で、菱形１２面体の内接球を持っているので、この球と、内接立方体、「空の立方体」の個数は同数となる。従って、２個の立方体に対して１個の球が対応していることになる。ここから球の空間充填密度が計算できる。

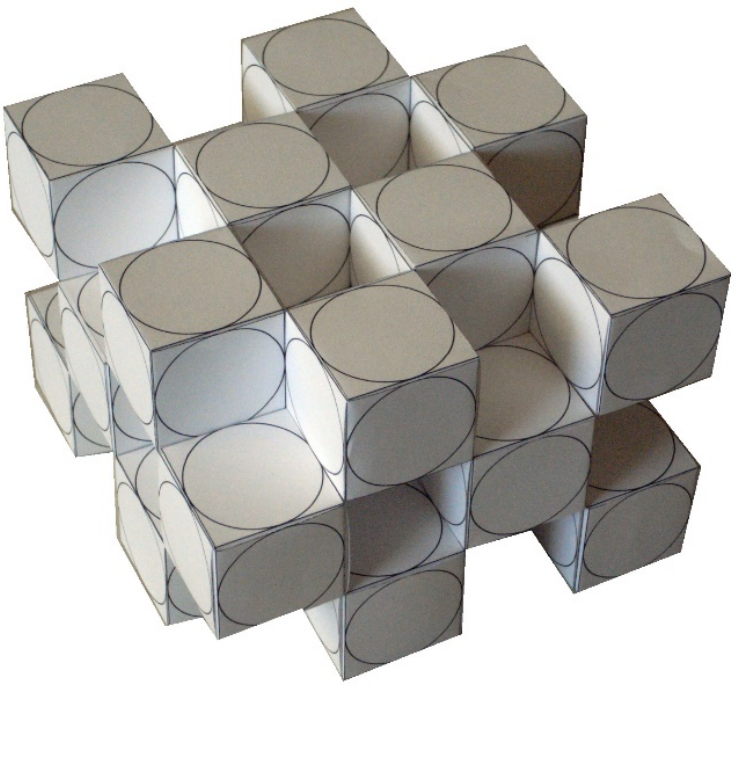
充填密度＝球の体積/（立方体の体積×2）＝（4/3）π/（2×2√2）＝（4/3）π/4√2
＝0.74048・・　すなわち、球の最密充填密度である。

以上のことから、隠れた構造体である立方体グリッドを媒介として、球の状態を述べると、次のようになる。

説明１：球の最密充填配置は、立方体グリッドに、単位立方体の中接球を３次元市松配置したものである。

下の写真は、立方体グリッドにおける３次元市松配置の部分模型です。これを見てわかる通り、基調は立方体であり、私たちに最も身近な立体であることで、全体像を含む骨格を、明瞭にイメージすることができる。さらに、３次元市松配置は、平面で見慣れた市松模様と同様、均等性、均一性を示しており、球の最密充填配置が、特別で、複雑なものでないことを一目で分からせてくれる。

「説明１」は、従来に比べて、身近で視覚的なイメージを重視した、わかり易い説明になっていると思う。



＊注記（表−１）体積算出

- 菱形１２面体：内接立方体の各面に沿って切り分けると、ピラミッド型四角錐が６つ出来る（菱形 12 面体の作り方・参照）。これを逆さにして立方体に押し込むと、過不足なく立方体に収まるので、立方体二つに再構成出来ることになる。よって、体積＝内接立方体の体積×2＝2$\sqrt{2}$×2＝4$\sqrt{2}$
- 内接立方体：体積＝（$\sqrt{2}$）^{3}＝2$\sqrt{2}$
- 立方８面体：１辺$\sqrt{2}$の立方体から隅を切り落とした切片 8 つは、辺長 1 の正８面体を構成する。その正８面体の体積は 1×1×$\sqrt{2}$/3＝$\sqrt{2}$/3 なので、
  体積＝（一辺$\sqrt{2}$の立方体の体積）−（一辺１の正８面体の体積）
  ＝2$\sqrt{2}$−$\sqrt{2}$/3＝(5/3)$\sqrt{2}$
- 球：公式 V＝(4/3)πr^3 から、体積＝(4/3)$\pi 1^3$＝(4/3)π

[別解]

「説明１」の文中には、既知のキーワードもなく、またそれらを直接論拠にしていることもないように思えるので、切り口に関しては一応新しいものと考えている。この結果を踏まえて、さらなる一般化を考えたいと思い、いくつかの思考実験をすることにした。最初のケースとして、（図 2a）から（図 2d）まで、図に即して、説明する。

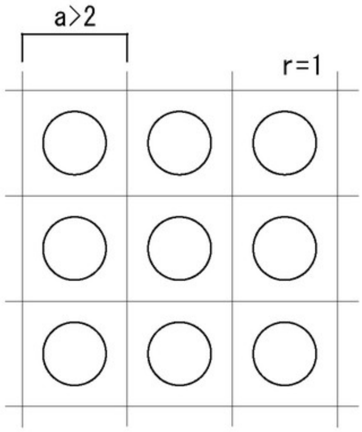


図2a

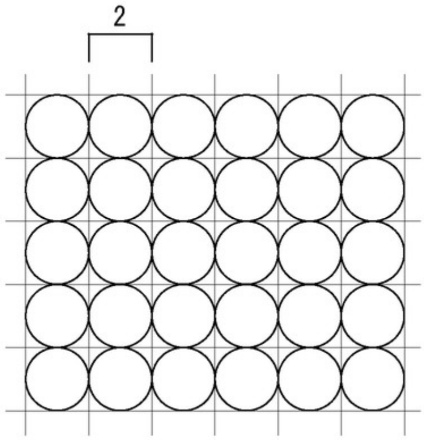


図２ｂ

（図 2a）まず、隠れた構造体としてではなく、普遍的で一般的な、立方体グリッドを考える。そして、すべてのセル（単位グリッド）について、その中心に半径１の球を置く。この球の配置は、ごく一般的な均等配置以外の何物でもない。
（図２ｂ）次に、充填密度を上げるため、グリッドの間隔を徐々に小さくしていく。グリッド間隔が２になると、それ以上は小さくならない。球が相互にセルの面を介して接するからである。このやり方ではこれが限界である。充填密度を計算すると、

充填密度＝球の体積/セルの体積＝（4/3）π/2^3＝4π/24＝π/6＝0.52・・

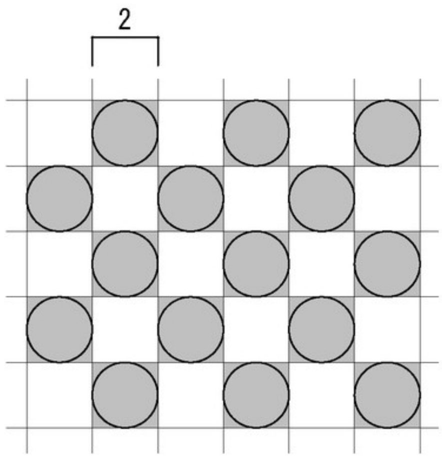


図２ｃ

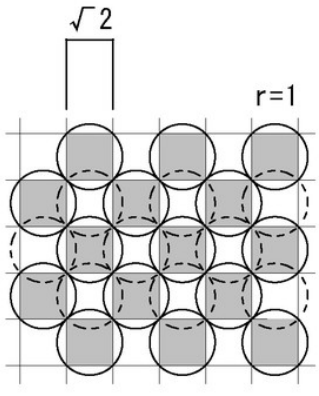


図２ｄ

（図２ｃ）これでは密度が十分でないので、グリッド間隔をさらに縮めるために、球を１つおきに間引いて、半数にする。その結果、球、及び球を持つセルは**３次元市松配置**となり、同数の空のセルもまた３次元市松配置となる。この状態もやはり均等配置と言える。

充填密度は（図２ｂ）の半分になり、$\pi/(6\times2)=0.26$・・

（図２ｄ）充填密度を上げるため、グリッドの間隔を、さらに小さくしていく。それにつれて、球は空のセルの方へはみ出してくる。グリッド間隔が$\sqrt{2}$になると、また、それ以上は小さくならない。今度は、球が相互にセルの辺を介して接するからである。そして、これ以上セルを縮める方法はないので、これが最密充填配置と言うことになる。この図は前出の（図 1）とまったく同じなので、充填密度は計算するまでもなく、最密充填密度である。この時点でも、空間配置の均等性、一様性は保持されていると考える。

この最初のケースは、「説明 1」の状況を、遡って、ごく一般的な均等配置から、最密充填に至るまでのプロセスをたどってみた、と言うことであるが、また別の記述の仕方もある。それは以下に示すように、格子の構造を引用することである。

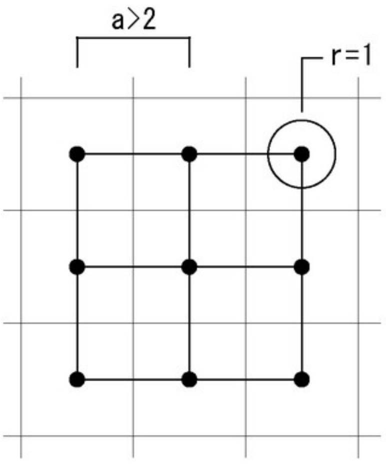


図3a

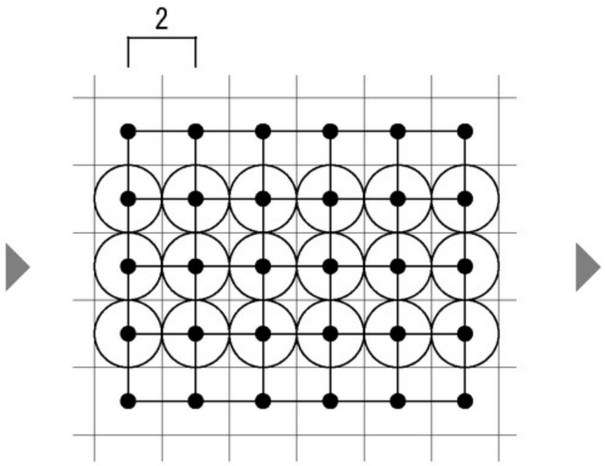


図３ｂ

（図 3a～3d）までは、（図 2a～2d）と全く同じプロセスなので一部省略しながら述べる。

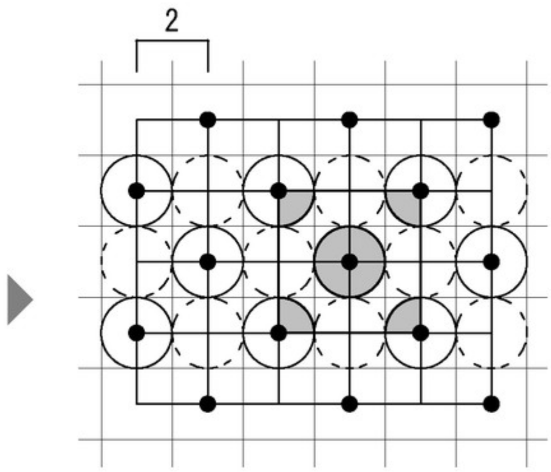


図３ｃ

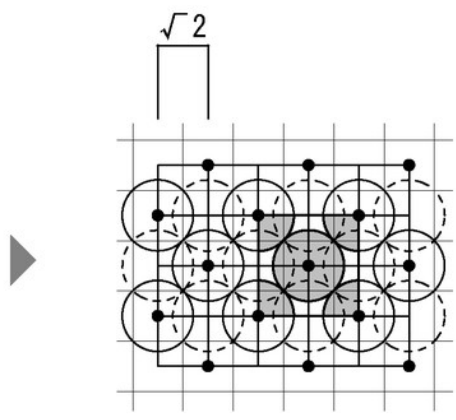


図３ｄ

（図２ｃ）の段階で球の半数を間引いた状態を、（図３ｃ）で見ると、この時点で既に面心立方格子（２倍長・ルーズな形）になっているのが分る。そして、次の（図３ｄ）では、さらに圧縮されて、面心立方格子（2 倍長・タイトな形）となる。つまり、均等配置の球を間引いて３次元市松配置にする、という操作は、格子構造の上からは、立方格子から面心立方格子に移るということになるのだろうか。（専門知識がないので、正確な表現が分らない/どなたかご指導ください）　いずれにせよ、ここで面心立方格子が出てきては、最密充填配置に疑いを挟む余地はない。

上記（図３ｂ）の段階で、次に移行する時に、空間を圧縮する準備として、球の数を半数にしたが、空間を圧縮する方法は他にもある。それは格子を押しつぶしてセルの体積を小さくする方法である。

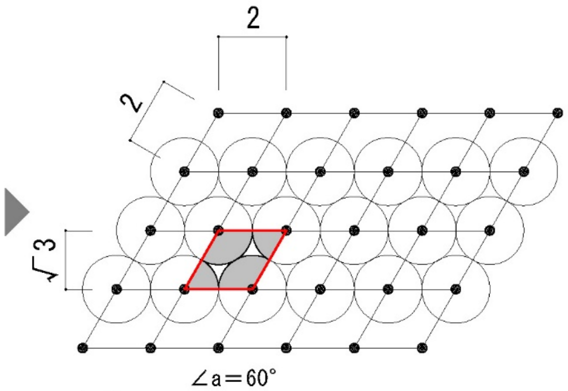


図3e

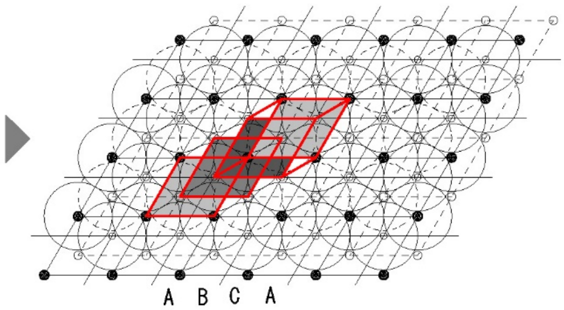
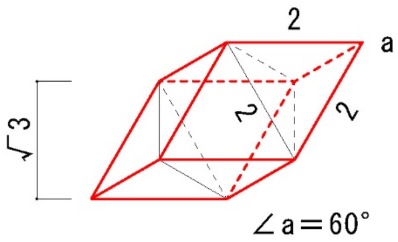


図３ｆ



菱形6面体セル拡大図

（図 3e）は XYZ 方向の内、XZ はそのままとして、まず、Y（軸）方向のみを倒し変形させた形です。格子の長さは変えず、球相互を滑らすようにして、くぼみで止まるまで潰します。止まったところの角度は 60°です。この時、セルの形は菱形柱の形です。セルに切り取られる隅の球の切片は 8 つありますが、合わせると 1 つの球になります。菱形柱の体積が出れば、充填密度が計算できます。菱形柱の体積＝2×2×√3＝4√3

充填密度＝球の体積/セルの体積＝（4/3）π/4√3＝π/3√3＝0.60・・

（図３ｆ）続いて、Z（軸）方向を XY 面 30° の方向に倒し変形させます。この時のセルの形は菱形 6 面体になり、格子構造としては、**菱面体格子**と呼べそうです。菱形面は内角 60° 、120° で、正 3 角形を 2 つ繋げた形です。（拡大図参照）この体積の計算は面倒そうですが、簡単な方法があります。この菱形 6 面体を分割すると、一つの正 8 面体と二つの正四面体とになります。次に正 8 面体を稜線に沿って 8 つに分割しま

す。この時の切片は、立方体から内接する正４面体を切り出した時の残りの切片と同じです。底面は正３角形、他の３面は直角３角形の３角錐です。従って、一つの正４面体に４つの三角錐を併せると立方体が出来ます。この時立方体の正方形面の対角線はセルの格子の長さなので２です。すると立方体の１辺の長さは√2です。つまり１辺２の菱形６面体は１辺√2の立方体２つに再構成されます。したがって、この場合セルの体積は　$(\sqrt{2})^3 \times 2 = 4\sqrt{2}$　となります。隅の球の切片を合計すると、やはり１なので菱面体格子における、球の充填密度を計算できる。

充填密度＝球の体積/セルの体積＝$(4/3)\pi/4\sqrt{2}=\pi/3\sqrt{2}=0.7408$・・

と、最密充填になるわけだが、（図３ｆ）を見ると、平面の六方配置を球のくぼみに合わせて、ずらしながら３層（A、B、C）が重なっているのが見て取れる。４層目（A）になって最初の配置に一致している。これは「立方最密充填構造」と呼ばれるものであって、「六方最密充填構造」とは別のものである。これらの違いについては後述する。

また、この状況は、ガウスが証明をした時の状況と同じであろうと考えられるので、セルの体積は、例の二次形式の判別式からも求められる。結果だけを示せば、　$a^2b^2c^2 \leqq 2\Delta$　から等号だけを生かして、
セルの体積＝$\sqrt{\Delta}=abc/\sqrt{2}=2^3/\sqrt{2}=8/\sqrt{2}=8\sqrt{2}/2=4\sqrt{2}$　（a、b、c＝2）

実は、格子を押しつぶす方法はもう一つある。上記（図3e、3f）は、正方形配置を正３角形配置（平面の六方配置）にしてから、押しつぶしたが、正方形配置のまま押しつぶすこともできる。（図３ｂ）からを再掲すると下図の（図３ｇ）がそれである。

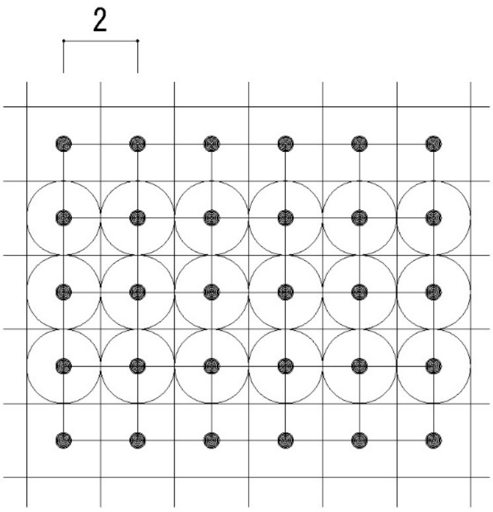


図３ｂ

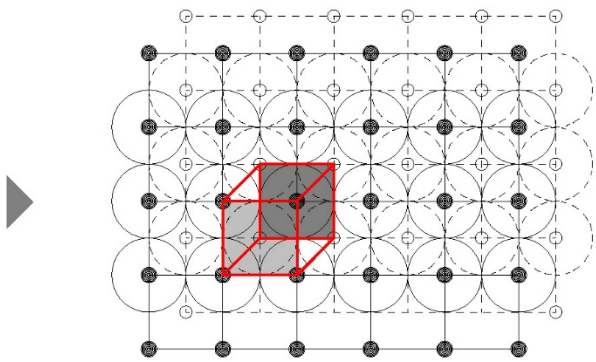


図３ｇ

（図３ｇ）は正方形配置のままZ軸をXY面45°の方向に倒し変形したものである。この時のセルの形は立方体を斜め上から押しつぶした形で、扁平立方体（または扁平６面体）とでも呼べる形である。正方形の一辺は2、扁平になった高さ方向の寸法は√2　なので、セルの体積は　$2\times2\times\sqrt{2}=4\sqrt{2}$　となる。

また、この場合についても二次形式の判別式は、上に示したままの形で適用できる。
セルの体積＝$\sqrt{\Delta}=abc/\sqrt{2}=4\sqrt{2}$　　（a、b、c＝2）

別解のまとめ

1. 一般的な均等配置から、球の最密充填配置に至るまでの、いくつかのプロセスを示した。
2. 球の最密充填時における、実体配置には、均一性、一様性がある。

3. 新たに出てきた格子構造（結晶構造ではないかもしれない）は、「菱形 6 面体を単位格子とするもの」と、「扁平立方体を単位格子とするもの」の二つであるが、既に知られている「面心立方格子」と「立方最密充填構造」と併せると 4 つの構造が示されたことになる。この 4 構造が持つ、それぞれの格子点の相対的位置関係はまったく同一である。格子点に球を密に実体配置すれば、最密充填配置になる。　つまりこの 4 構造は「一つの構造」と見ることが出来る。ただし、「六方最密充填構造」はこの中に含まれない。第 2 部に詳述する。

4. これまでの過程で、何度も繰り返し現れた数値がある。$4\sqrt{2}$　である。これが分母に現れると球の最密充填が成立する。これを更に補足すると、

$4\sqrt{2}=2\times(\sqrt{2})^3=$「２つの立方体」

この等式が球の最密充填の一つの秘密なのかも知れない。何か不思議な思いで受け止めたことは確かです。

―― 一個の球のまわりに十二個の球を配置したものは、可能な限り最も稠密な充填方法である
J・ケプラー「六角形の雪について」

［２］

さて、ここからは内接立方体の部を離れて、内接する双対立体である立方８面体の部に移ろう。

改めて確認すると、球（菱形１２面体の内接球）に対して、立方８面体の各頂点は内接している。しかも、球と立方８面体の接点は同一で菱形面の中心点である。さて、菱形１２面体が自身を繰り返して、空間を埋め尽くす時、一つの菱形１２面体は１２の菱形１２面体と接するが、それは一つの内接球が 12 の他の内接球と接することでもある。そして、それは一つの元球に内接する立方８面体の各頂点で接していることをも示している。この時、立方８面体の１つの頂点と立体の中心を直線で結び、それをさらに外側に球の半径の長さ延長すると、接している他の内接球の中心に至る。その他の頂点についても同様であるから、それらの球の中心を直線で結べば、もとの立方８面体の２倍の辺長を持つ立方８面体が形成されることになる。

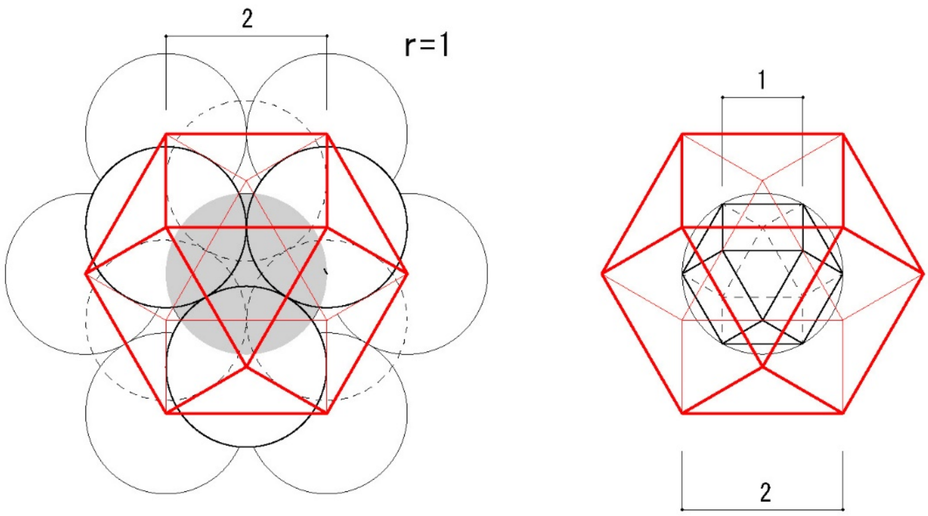


図4

以上のことから、次のようにまとめることが出来る

説明２：球の最密充填時には、１個の球に12個の球が接することで、ユニットを形成するが、この時、12個の球の中心は、一辺が球の直径に等しい立方八面体の各頂点を占める。

立方８面体は、正方形面（６面）と正３角面（８面）の２種類の面を持っている。ユニットを見ようとする時、正方形面に垂直に視線をあてる時は、面心立方格子として見え（図５）、正３角面に垂直に視線をあてる時は、立方最密充填構造として見える（図６）。これは見る方向によって構造呼称が変わるという場合、具体的な視線の方向を見出す助けになる。

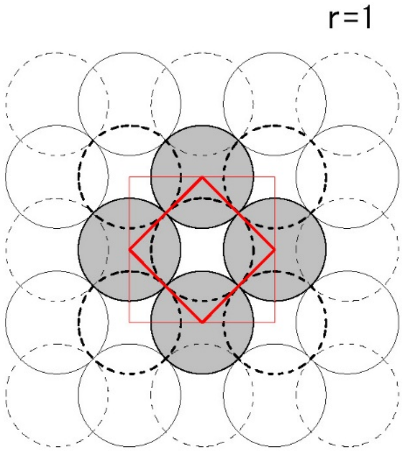


図5

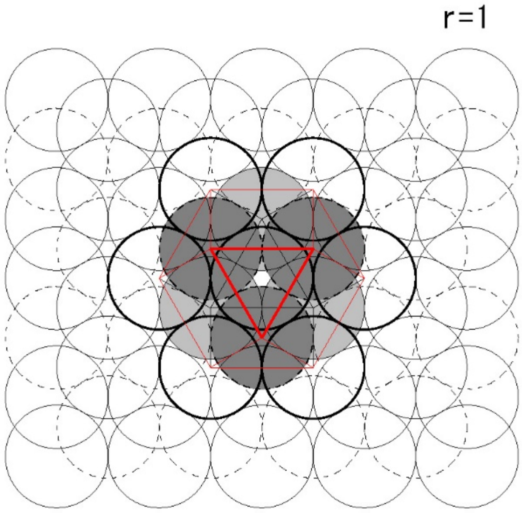
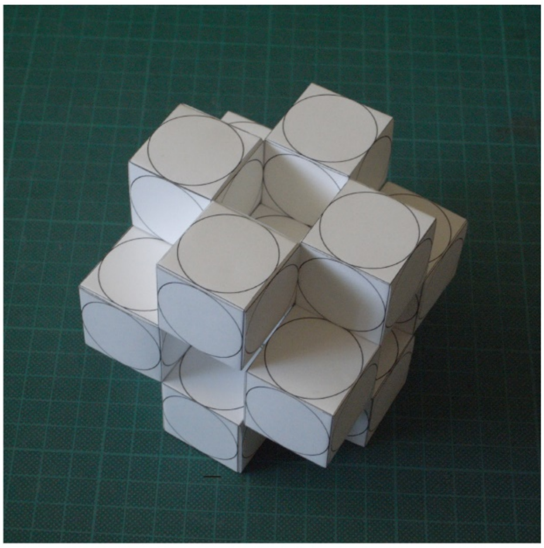
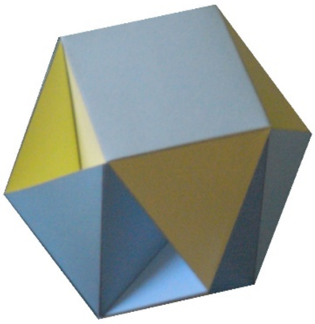


図6

球の最密充填について

下の写真は、「説明１」の立方体グリッドにおける３次元市松配置の部分模型の、そのまた部分を切り取ったもので、「説明２」で述べた、ユニット（13 セル）の模型です。外周の 12 のセルの中心を結ぶと立方８面体になっています。





第１部の結び

最密充填という言葉には、ちょっと謎めいた神秘的な雰囲気がある。「ケプラー予測」と聞けば、４００年のロマンがある。

今回示した「説明 1、2」「別解」などが指し示す球の最密充填配置は、同一の実体配置であることは明白な事実です。今後、この他に別の解説がなされるとしても、この事情は全く変わらない。今回わかったことは、それでも新しい切り口はあるということ、そして、これからも現れ得るということ、つまり、見る人が変われば、それぞれに異なる顔を見せてくれるということです。言ってみれば、「七つの顔を持つ男」「怪人二十面相」に相通ずるものがあるような気がします。この問題の魅力は、案外、そんなところにあるのかも知れません。コンピューターを駆使しての「証明」は 99%承認されたと言います。おそらく覆ることはないと思います。しかし、それによって、この問題の魅力が衰えることはないでしょう。

今回は、自分が納得するために始めたことではありますが、十分に遊ばせてもらいましたし、また、十分に楽しませていただきました。私に取りましては、これが、数学遊戯であり、数楽でもあります。お付き合いいただき、ありがとうございました。

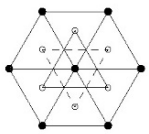
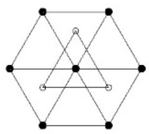
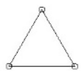
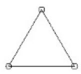
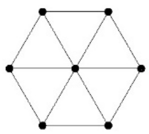
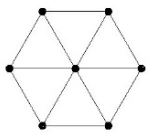
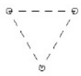
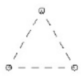
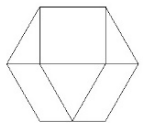
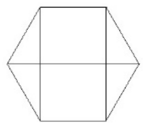
第２部　二つの構造

——結晶学者のＷ・バーロウが「メロンを効率よく積み上げる方法は一つではなく、二つある」ことを、・・さらに、彼と彼の共同研究者は「最も効率よくメロンを積み上げる方法は二つどころか無数にある」ことを示した——

［比較］

少し気になっていたので、調べてみました。「立方最密充填構造と六方最密充填構造」についてです。たまたま見つけて、当協会とも関係のある、「数学月間」HP で、SKG 通信「2014.08.26」No.026　ケプラー予想で簡潔に解説されているのを拝見しました。

要は、両者は結晶構造としては、別構造である、と言うことで下表（表－２）のように理解しました。（勿論、引用に必要な限りの表面的な理解です）

［表－２］	立方最密充填構造（面心立方格子）	六方最密充填構造
ユニット格子図		
上　段		
中　段		
下　段		
（上段との関係）	点対象	鏡映対称
ユニット模式立体		
	立方８面体	ひねり立方８面体

その結果わかったことは、菱形１２面体は立方最密充填構造のボロノイ・セルであって、六方最密充填構造のボロノイ・セルは他に、相当する多面体があるのではないか。と言うことです。上表の下端の図は、１３球の内、中央を除く１２球の中心を結んだ、ユニットの模式多面体です。投稿文の「説明２」で述べたように、菱形１２面体の場合は、立方８面体です。相対する３角面が点対象になっていますから、これは明らかに立方最密充填構造です。これを六方最密充填構造に当てはめようとすると、上表の下端右側に示した「ひねり立方８面体」に（多分）なります。「ひねり立方８面体」は自己流の呼称ですが、ミラーの立体と同様、立方８面体の下半分を６０°ひねったものです。こうすると上下１組の３角面は鏡映対称になります。

この立体の双対の立体を探せば、それが六方最密充填構造のボロノイ・セルかも知れません。　（以上「訂正・他」より再掲）

（表－２）の要点は、中段を挟んで上段と下段とが、点対称／鏡映対称　の違いがあるという点である。

両構造の違いについては、通常の解説（ウィキペディア／球充填　等）によれば、二次元の六方配置を重ねることに双方とも違いはないが、ABAB・・と２層を繰り返すものを六方最密充填と言い、ABCABC・・と３層を繰り返すものを立方最密充填と言う、とされている。それに基づいて、前出の第１部[別解]（図３ｆ：立方最密充填）と（図 8）六方最密充填をならべて比較してみる。相違点は、C 層があるか、ないかの違いであり、C 層が省略されている場合を、六方最密充填としていることが分る。

立方最密充填（ABC３層）

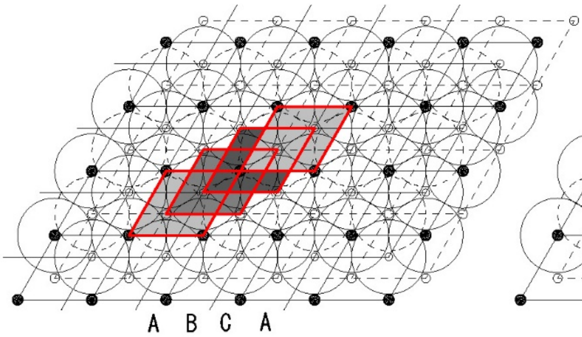


図7（図3ｆ再掲）

六方最密充填（AB２層）

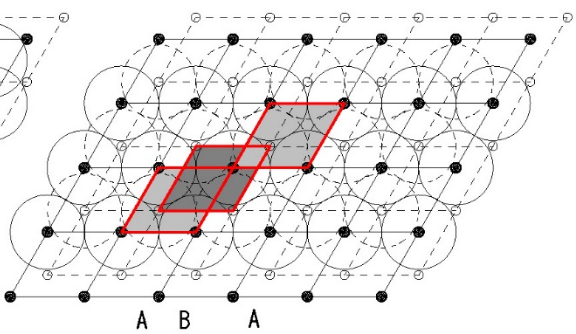
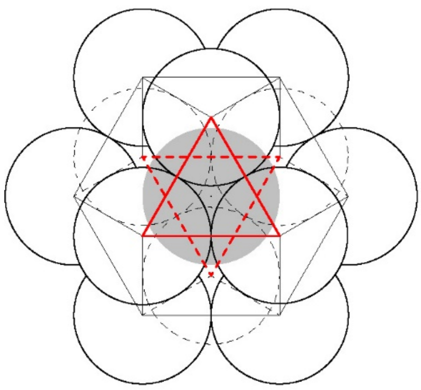


図8

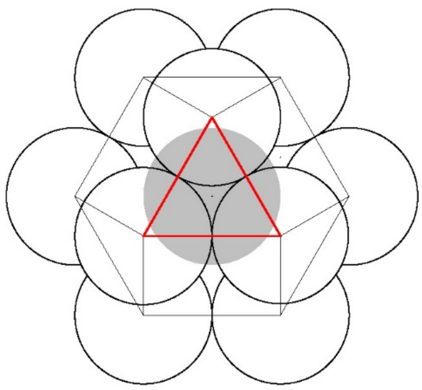
しかしこれだけでは、この違いによって何がどう変わるのか、まったく分らないといってよい。これを今回のように、上中下３段（層）を取り出し、ユニットを基にして説明した方が理解しやすいと思う。
最密充填時のユニット１３球（元球＋１２球）を「ユニット格子図」に即して実体配置したものを、「ユニット模式立体」と重ねたものが下図である。上方から見た上面図で、元球は薄墨で示し、下段を点線で示しているが、六方最密充填の場合は上段と重なっているため、点線が隠れていて見えない。

図９　立方最密充填構造
（面心立方格子）



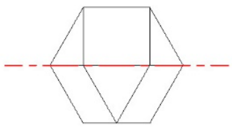
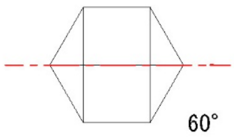
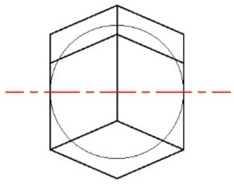
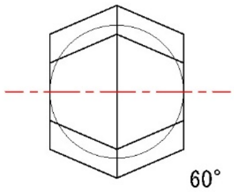
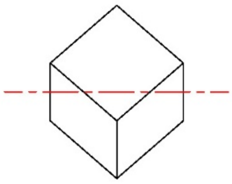
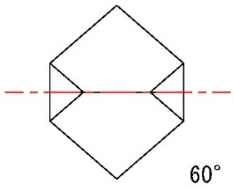
上段の３球と下段（点線）の３球が点対称

図10　六方最密充填構造



上段の３球と下段が重なっている（鏡映対称）

二つの構造の違いを示す「ユニット格子図」に即して球を実体配置し、それを「ユニット模式立体」に対応させ、「模式立体」の双対となる立体を求めることで、「ボロノイ・セル」にたどり着き、その「内接立体」をふくめて、関連３立体を決定することが出来るのである。その関連３立体を比較一覧したものが下表（表－３）である。

［表-３］	R型（正規型）	H型（ひねり変形型）
結晶構造呼称	立方最密充填構造 （面心立方格子）	六方最密充填構造
ユニット模式立体 （V・セル双対）	 立方８面体	 ひねり立方８面体
ボロノイ・セル	 菱形１２面体	 ひねり菱形１２面体
内接立体 （球、双対　以外）	 立方体	 ひねり立方体
対称性	正８面体対称	3回転対称

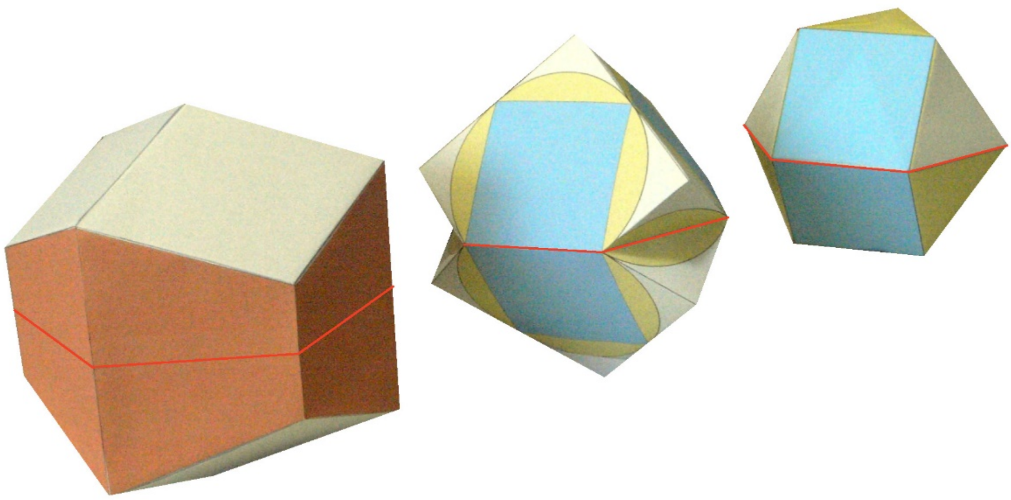
表中のＲ型、Ｈ型については後述する。

「ボロノイ・セル」を含む、関連３立体については、立方最密充填の場合は、菱形１２面体を中心に、立方８面体、立方体と、既知の立体、既知の関係性であるが、六方最密充填の場合は、私にとって、また多くの人にとって、未知の立体であろうと思う。これらの立体は、全てが、左側の既知の立体の上下半分のどちらかを 60°ひねった形になっている。（「ひねり」のついた立体呼称はすべて自己流です）。赤色の一点鎖線は、そのひねり面を示している。ひねり面はいずれも正６角形であり、球にとっては大円にあたる。
ここで、「ひねり」について説明する。「ねじれ立方体」「ねじれ１２面体」などで使われている「ねじれ」との違いは、同じように立体の部分を回転させるのだが、「ひねり」の場合は、ひねり回転の軸に直交する「ひねり面」で一旦切り離した後、切り離された部分を回転させる点が違っている。「ねじれ」の場合は切り離すことはない。「ひねり」を使った代表的な立体が「ミラーの立体」である。斜方立方８面体の部分を 45°ひねったもので、擬斜方立方８面体とも呼ばれている。＊
今回の場合は、「菱形 12 面体」の上下半分をどちらかに 60°ひねると「ひねり菱形 12 面体」になるのだが、さらに 60°（つまり 120°）ひねると、元の立体に戻る。これを３回繰り返すと、完全に元の状態（360°１回転）に返ってくる。従って、60°ひねるのを１回の操作とすれば、２回操作で１周期となり、

「ひねり対称性」と言うものを想定すれば、３回対称と言うことになる。つまり、ひねる度に「元立体」と「ひねり立体」の間を行き来していることになる。これは関連する三立体について共通した特性である。このひねり操作の前後で、外見にかかわらず、意外に多くの属性が保存されることが分る。つまり、変わらないものが多く、変わるものが少ないということである。　前出の第１部（表－1）の立体名に「ひねり」を加えれば、ほぼ通用する。また、「面」に関しても、ひねり面による分割線が面を二つに分ける場合は、その二つの部分面を元の面と見做せば、変わるのは相対的な位置のみで、「面」の形は変わらないと見ることが出来る。
ここで便宜上、最密充填時のボロノイ・セルとして、「菱形１２面体」を**R 型**（Regular＝正規型）、「ひねり菱形１２面体」を、**H 型**（Hineri＝ひねり変形型）と、呼ぶことにする。同時に、「内接立体」、「ユニット模式立体」についても同様に区別して呼ぶことにする。R 型と H 型の最も大きな違いは、両者の対称性にある。R 型は正８面体対称であり、２，３，４回転の対称軸を持ち、３次元の均等性と、一様性を持っているが、対するＨ型は、２次元の３回転対称軸を持つのみである。

＊　余談になるが、H 型のユニット模式立体である「ひねり立方８面体」はジョンソンの立体の#27 に挙げられている。その名前は「同相双三角台塔」。ちなみに前出の「ミラーの立体」は同じく#37 に挙げられており、名前は「異相双四角塔柱」である。なお、この投稿文中は自己流の名前の方を使わせていただく。

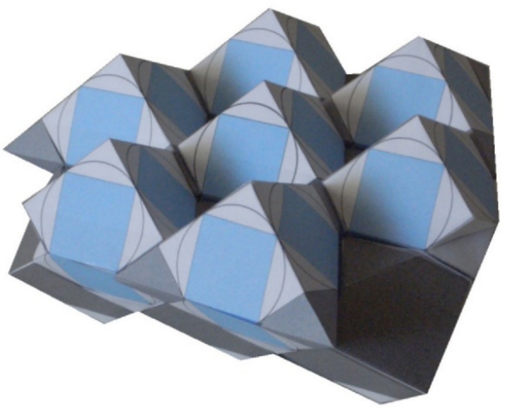
H 型（ひねり変形型）の関連 3 立体の模型写真を下に載せる。左から、ひねり菱形１２面体（ボロノイ・セル）、ひねり立方体（内接立体）、ひねり立方８面体（ユニット模式立体）である。模型は縮尺を揃え、向きを揃え、ひねり回転軸が垂直になるよう、つまりひねり面（赤線表示）が水平になるように置いて、撮影している。

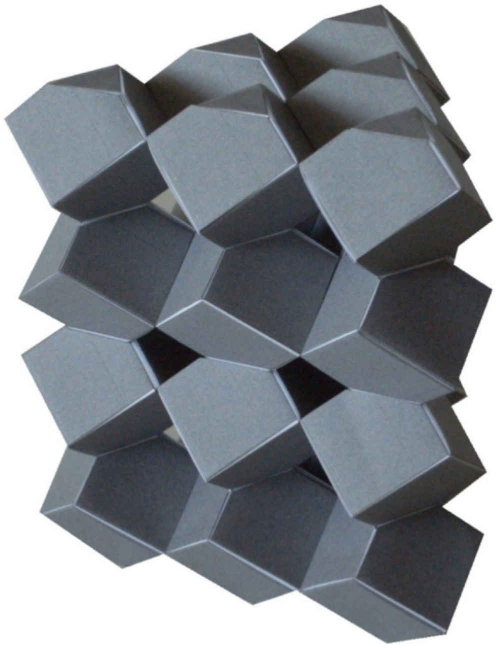


「内接立体」は内部構造を表す単位立体である。最初の投稿での「説明 1」で述べた「立方体グリッド」がそれにあたる。ところで「ひねり立方体グリッド」と言うものが成立するのだろうか。外見上は上の写真を見ても、〇〇立方体とは名ばかりの奇妙な形をしている。ただし、単位立体としては、球との関係、隣接する「ひねり立方体」との関係（辺のみで接して、すべての面は空間に解放されている）は、立方体の場合と変わらないはずなので、これが手掛かりになりそうである。

まず、元立体として、球を持つ立方体と空の立方体が隣接している。この時、球を持つ立方体をひねり面に沿って切り離し 60° 回転させると「ひねり立方体」に引きずられて、「空の立方体」の一部が切り離される。結果として、「空のセル」は大小二つの部分になる。主たる部分（大）は立方体の対角の 2 隅を、辺の中点で切り取った形になり、その時の切片を 2 つ合わせたものが「小」の部分になる。合わせると元の立方体と同体積になる。この小の部分は、3 つの「ひねり立方体」の凹部によって、完全に囲い込まれる。従って、見かけ上は、「空のセル」は主たる部分（大）のみとし、「ひねり立方体セル」は、空のセルの切片部分（小）を含み持つものとした方が考えやすい。また、ひねり立方体セルの境界面は、即ち空のセルの境界面なので、構造体グリッドの構成は、形を把握しやすい「空のセル」を組み立てて行うこととする。模型は「ひねり立方体セル」と区別するために、「空のセル」を濃いグレーで着色する。

左の写真は、「ひねり立方体」と「空のセル」をセットで 1 層分と、「切片部分」との関係等を示したものであり、右の写真は、「空のセル」のみを 4 層重ねた構造体グリッドである。

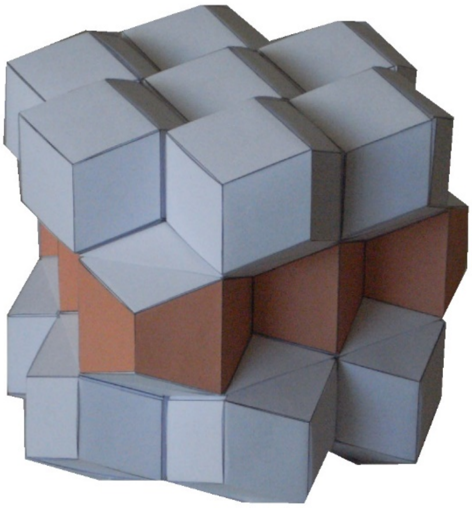


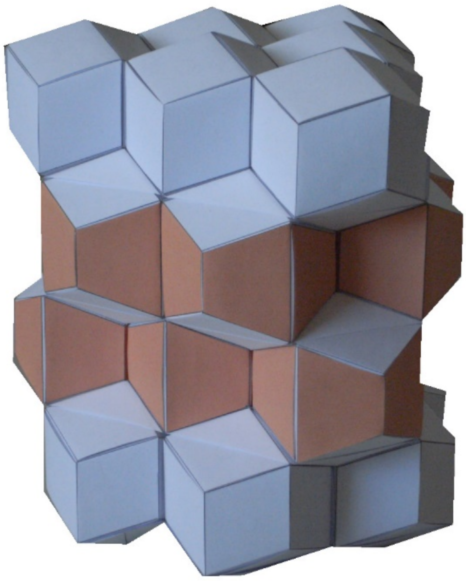


既に見た「立方体グリッド」（R 型）と比較すると複雑・異様な形状をしているが、これが「ひねり立方体グリッド」（H 型）であることは間違いない。不規則に見えるが、2 層ごとの周期を持つことが見て取れる。

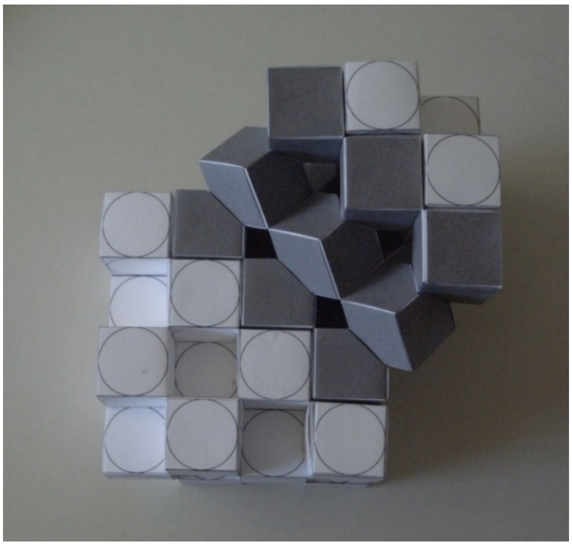
[混合]

菱形１２面体が自身のみで、空間を埋めることは周知のことなのだが、中に異物（異立体）が混在可能などとは考えてもみなかったことである。しかし、驚くことに、R 型と H 型は混在できるのである。ただし、H 型は２次元の対称性しか持たないので、層単位に限定されるのだが、任意の順に重なり、混在できるのである。下の写真は、RHR と一層ずつ交互に重ねたものと、RHHR と２層を挟んだものである。すべてが白色菱形面のものが R 型である。一部赤色のものが H 型、１２面の内６面が赤色台形面で H 型相互の接触面になり、上下３面ずつは白色菱形面で、R 型もしくは H 型と接触できる。これによって、R 型の層と H 型の層は任意の組み合わせで、重ねることが出来、球の最密充填配置は、二つのみでなく無数にある、と言われる根拠となる。これが混合形式である。

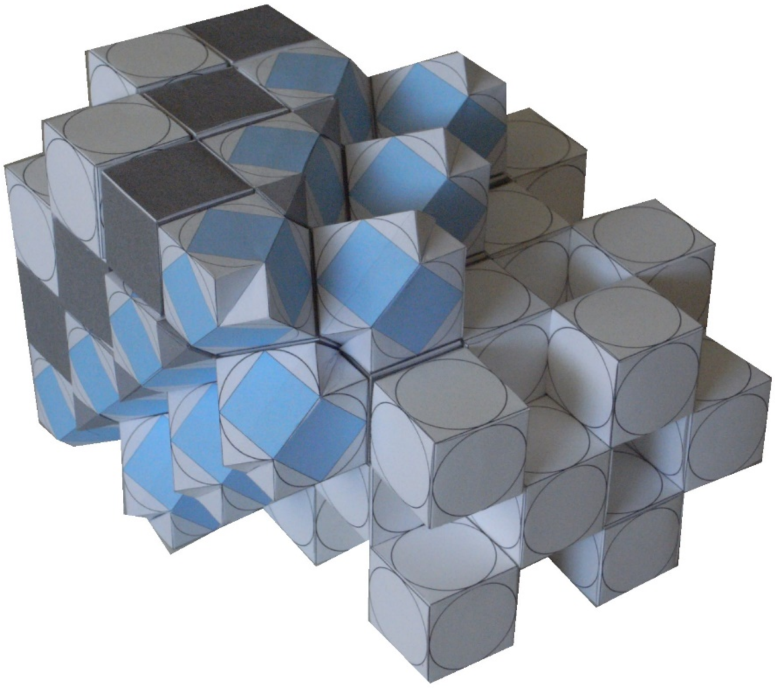




そして、この混合形式の場合の内部構造グリッドはどうなるのだろう。R 型は「立方体グリッド」、H 型は「ひねり立方体グリッド」である。各々の詳細については、既に述べている。層別に重ねることになるが、基本は R 型とし、H 型の層を挟む形とする。H 型は２回１周期なので、２層を挟むのが攪乱を少なく抑えられるだろう、との見通しを立てて、模型を製作してみた。下の写真は、H 型の「空のセル」のみを R 型の「立方体グリッド」に２層分挟んだものである。



下の写真はＲ型の「立方体グリッド」にＨ型の「ひねり立方体グリッド」及び「空のセル」を２層分挟んだものである。「空のセル」は一部のみ見えるがその特徴となる形状は、隠れて見えない。ベースとなっている「空のセル」によるグリッドは、上に載せた写真と同じものである。



一応見通し通り、Ｈ型２層を挟んでＲ型に戻った時、Ｒ型の立方体グリッドの方向は元の方向に一致する形となっている。ただし、水平、垂直両方向に微妙なずれが生じている。原因は未確認である。いずれにせよ、Ｒ型とＨ型の関係が、ボロノイ・セルの内側に隠された、構造グリッドにも正確に反映されていることを示していると思う。

［３］

H 型について、最初に「ひねり」＋「元立体（R 型）名」の形で、自己流に名前を付けた時点で、私の頭の中には、まず元立体があり、H 型はそれにひねり変換を加えたものなので、いわば派生的なもの、ファミリーに属するもの、従属的なもの、つまりは子立体的なもの、とするイメージがあったことは確かである。しかしその後、多くの特性、属性を共有することを見てきたが、これを表す適切な「語」がなかなか見当たらないまま、今に至っている。まあ、このままでも同族的なイメージは伝わるだろう、と思い、次の説明を加えることとした。

説明 3：球の最密充填配置は、「菱形１２面体」と「ひねり菱形１２面体」をボロノイ・セルとする方法によって実現される。そのいずれかの方法でも良いし、両者の混合形式でも良い。

菱形１２面体をボロノイ・セルとする方法は**R 型**（正規型）であり、立方体グリッドを構造体とし、面心立方格子もしくは立方最密充填と呼ばれるものである。ひねり菱形１２面体は、元立体に 60°ひねり変換が加わったものである。それをボロノイ・セルとする方法は**H 型**（ひねり変形型）であり、ひねり立方体グリッドを構造体とし、六方最密充填と呼ばれものである。両者がある種の同族関係にあるとすれば、異なる方法による充填密度が、完全に一致するという異様とも思える現象を容認することも出来よう。　球の最密充填密度は 0.74048・・・一つである。

以下の段落については、ジョージ・G・スピーロ／青木薫 訳 「ケプラー予想」を参考にした。
（第１部 ［１］、［２］章、第２部 冒頭の前置文も同書からの抜粋引用である）

さて、本来のケプラー予想における最密充填は何だったのだろうか、という問いに対しては、ケプラーが書き残したものや、証明を成し遂げたトム・ヘールズの言葉などから、かなり高い確度で答えることが出来ると思う。あえて結晶構造的に言えば、それは、面心立方格子、すなわち立方最密充填構造である。ケプラーが「六角形の雪について」という小冊子を書いて、友人に送ったとされるのは 1611 年のことである。この冊子の中に、「ケプラー予想」があった。それから 300 年ほど時代が下った 1883 年に結晶学者の W・バーロウが「メロンを効率よく積み上げるむ方法は一つではなく、二つある」ことを指摘した。・・さらに、バーロウと共同研究者は、1907 年「最も効率よくメロンを積み上げる方法は二つどころか無数にある」ことを示した。と上記の本に記されている。面心立方格子による充填方法はケプラーが示していたわけだから、300 年後に示されたのは、もう一つの方法、つまり六方最密充填によるものに他ならない。従って、六方最密充填は、4 世紀にもわたる謎を彩る、遅れて発見されたエピソードの一つに過ぎないと言えなくもない。最密充填を一般的に論ずる場合には、両構造は、同列に扱っても良いが、ケプラー予想における場合には、本来の予想とエピソードと言う関係にならざるを得ないと思う。

ケプラーが予想した、最密充填構造は対称性に優れ、その配置には均等性と、一様性と、それらに基づく美しさがある。最初の投稿で、私が述べたかったのは、そのことなのである。

[結び]

最初の投稿時には、私自身、立方最密充填と六方最密充填の違いが良く分からず、同じようなものだという認識しかなかった。結果、面心立方格子（立方最密充填）と六方最密充填は見る角度が違うだけで、その実体配置がボロノイ・セルとしての菱形１２面体（の内接球）である、という認識でとどまっていた。混同と錯誤があったことは認めます。その上で、今回の考察により、はからずも、私が述べたかったことには理由があった、ということについてもご理解いただけたかと思います。

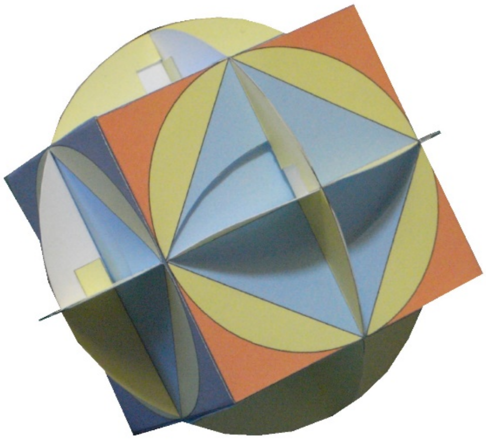
これで球の最密充填についての検討を終えます。最期に残っていたＲ型とＨ型の混在形式の内部構造の視覚化も一応、出来ました。このあとは、補足的なものが、少しずつ出てきそうなので、その時々で追加したいと思います。　「説明３」については、当初予定していなかったのですが、最初に投稿の主旨として、幾何学的アプローチを主に、と述べたこともあり、媒介となる多面体に関わればかかわるほど、両者を分別するよりは、同族として見る方向に向かっているのが意識されました。いずれにせよ、この形でまとめるのが、私にとっては自然だったのです。

前回、私の述べた中では「怪人二十面相に相通ずるものがある」としたことが一番的を射ていたかもしれません。またその時、十分に遊ばせてもらいました、と書きましたが、今回は、十分勉強させてもらいました。そして、十分楽しませてもらいました、と言うのは今回も同じです。お付き合いいただきありがとうございました。

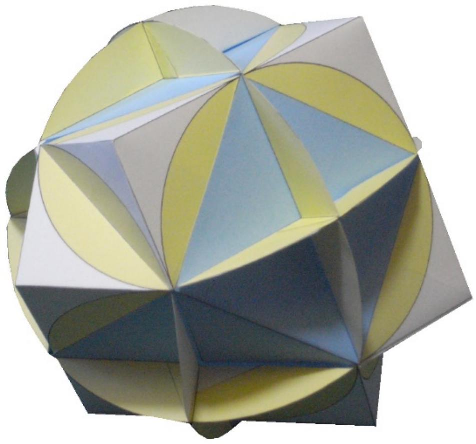
[追補 1]

内接立体に球との関係を付け加えた模型を作りましたので、ここに掲載します。左の写真がＲ型（立方体＋球）、右の写真がＨ型（ひねり立方体＋球）です。いずれも中接球です。一見似たように見えますが、よく見ると違っています。

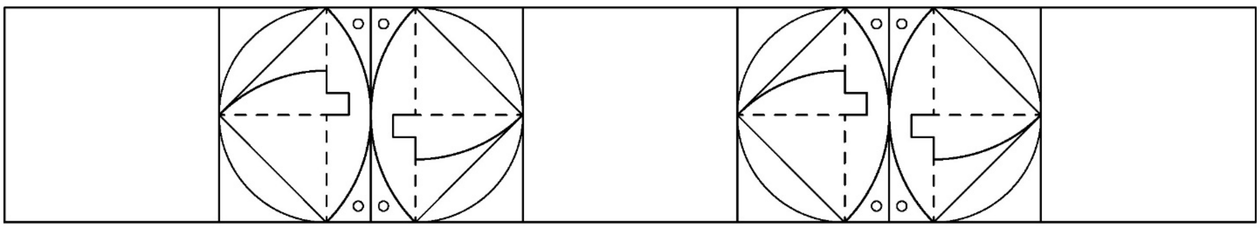
Ｒ　型



Ｈ　型



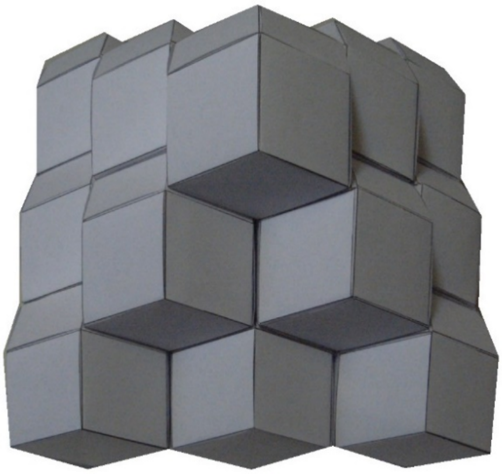
これはつい先日思いついたばかりのものです。Ｒ型については、いわゆる装飾部分（正１２面体の簡単な作り方・参照）が複雑ですが、正規の箱編み方式に則っています。



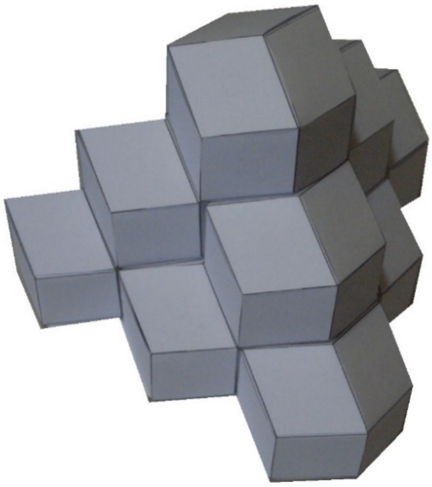
同形帯３本です。装飾部分中央実線を 180°山折、両側点線 90°谷折でリブ状に立ち上げ、糊付けする。直角方向の弧を起こし、突起の部分をリブの反対側に糊付けする。その後　○印部分の弧の外側を切り落とす。Ｈ型については、さすがに無理なので、装飾部分のみをひねり立方体に貼り付けた格好です。

[追補 2]

「同一の球を最も効率よく三次元空間に詰め込む方法は、果物屋のオレンジの積み方と同じ」とケプラーは言ったとされているので、実際にボロノイ・セルを使って、オレンジを積んでみたいと思う。まず、**R 型**で積んでみたのが次の写真である。



R 型　正方形底面のピラミッド



R 型　正 3 角形底面のピラミッド

R 型の場合には、二つの積み方が出来る。一つは二次元正方配置によるもので、正方底面のピラミッド、もう一つは二次元六方配置による 3 角底面ピラミッドである。いずれも、セルの上面の向きが同じ向きに揃っており、規則正しい端正な形になっている。

次に、**H 型**で積んでみた。積み方は二次元六方配置によるものしかない。下の二つの写真は同じ積み方をしているが、左は底面 3 角形の一辺が 4 つのセルで 3 段、その左奥の一列を外して一辺が 3 つのセルで 2 段積みにしたものが、右の写真である。ところで、両方ともよく見ると、ピラミッド型にはなっていないのが分る。左の場合は、2 段目の 3 角の隅にあるセルは遊んでいる。これを取り外せば 1 段目の隅のセルも遊んでしまう。仮にこれも取り外せば、底面は 6 角形になってしまう。右の場合には、頂上のセルを置くことが出来ない。

R 型のセルの上面が、すべての層（段）で同じ向きであったのに対し、H 型の場合は、層ごとに面の向きが違っており、1 層おきに同じ向きになっている。これはセルの上面の 3 枚と下面の 3 枚が、R 型の場合は点対称、H 型の場合は鏡面対称であることに起因している。つまりこの面の向きがそろわないということは、きれいに整ったピラミッド型にはならないということである。

ボロノイ・セルでは今いち納得できない方のために、立方最密充填と六方最密充填を比較した、前出第２部の図 7、図 8 をベースにして、球の実体配置で再確認してみよう。各層を薄墨で階層分けして上から見た図である。R 型は文字通り、きれいな形の 3 角底面ピラミッドであるが、H 型には遊んでいる球（赤×）がある、のが分ると思う。

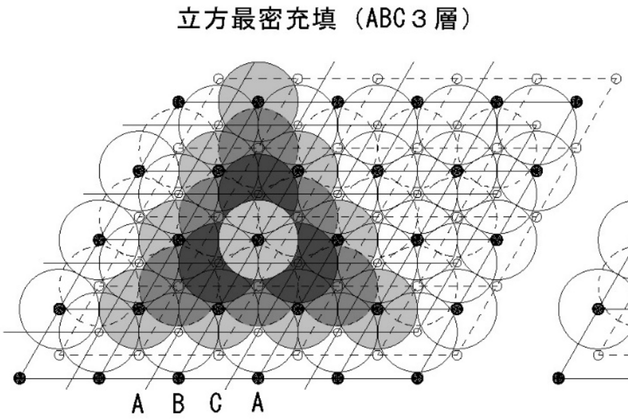


図11　R型 3角底面ピラミッド

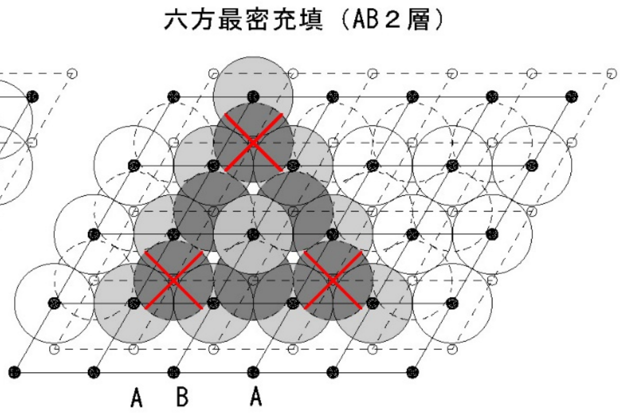
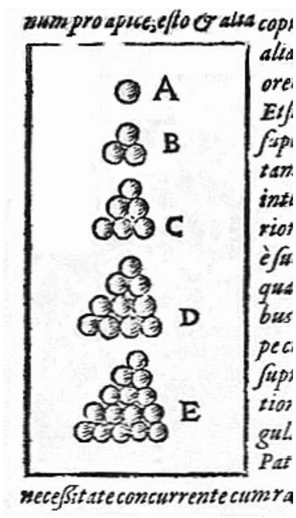


図12　H型 3角底面ピラミッド（擬似）

つまり結論としては、H 型では果物屋の店頭でオレンジを山形に効率よく積み上げることなど出来ないということです。しかし、これは別に驚くことではなく、エッジがあって解放されている場合に限ったことなのである。無限空間、もしくは充分に大きな箱に詰め込む場合なら、H 型は立派に最密充填を実現できます。
私が何を言いたいのかと言えば、もし、本当にケプラーが「それはオレンジの積み方と同じ」と言ったのなら、彼は R 型しか考えていなかったのだと思う。あるいは H 型を知っていたとしても、「それではオレンジは積めないよ」と言いたかったのかもしれない。勿論メロンだって積むことはできない。



上の図はケプラーの「六角形の雪について」の中の挿図だという。これはきれいに整ったピラミッド型に積まれたオレンジの絵なのだろうと思う。